delta

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$ $\pi = 3{,}141593$

SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

Czarne jamy
Teoria rozstrzygalna

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Polskiej Akademii Nauk oraz Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Adres Redakcji
ul. Śniadeckich 8,
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo. Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.; papier offsetowy III kl., 80g, 61×86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej, Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 417/74 W-121

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch, w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ":

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723

Semestr logiczny — jak to było, co to było?

Doc. dr hab. Wiktor MAREK

Od stycznia do czerwca 1973 roku odbył się w Międzynarodowym Centrum Matematycznym im. Stefana Banacha w Warszawie Semestr Poświęcony Podstawom Matematyki. Pod tą wspaniałą nazwą rozumie się zazwyczaj logikę i teorię mnogości, a ponieważ obie te dziedziny są w Polsce silnie reprezentowane (szereg ważnych pojęć i twierdzeń z tego zakresu powstało właśnie w Polsce), więc liczni matematycy z całego świata chętnie nasz kraj odwiedzają, by dyskutować nowe, powstałe w trakcie badań, problemy. Nic dziwnego zatem, że taka wyjątkowa okazja, jak cały semestr spotkań i wykładów, zgromadziła aż 82 uczonych z 22 krajów, nie licząc 47 matematyków polskich. Warszawa stała się na pół roku największym ośrodkiem badawczym w dziedzinie podstaw matematyki na świecie.

Przez pięć dni w tygodniu odbywały się w pałacyku przy ulicy Mokotowskiej różnorodne zajęcia. Soboty poświęcono na kontakty indywidualne i wykłady tych z gości, którzy przybyli do Warszawy tylko na krótko. Niedziele miały być wypełnione różnego typu rozrywkami. Ale właściwie przez cały czas trwania semestru, od rana do nocy, toczyły się nieustające dyskusje i spory. I dały one bogaty plon: w czasie semestru powstało dwadzieścia pięć prac naukowych, a co najmniej dwanaście zapoczątkowano. Jest to często wynik wspólnych badań matematyków z różnych krajów. Oczywiście pokazaliśmy naszym gościom Warszawę, nawiązaliśmy i zacieśniliśmy stosunki towarzyskie, ale pisząc o Semestrze niewątpliwie należy skoncentrować się na tym, co w nim było najważniejsze — na matematyce.

Czym właściwie zajmują się owe podstawy matematyki?

Głównym przedmiotem zainteresowania uprawiających tę dyscyplinę są: teorie (a więc zbiory zdań sformalizowanych języków) i modele (struktury, o których zdania te orzekają); drugi ważny nurt badań to problemy efektywności, trzeci wreszcie stanowi problematyka logik nieklasycznych (różnych od nauczanej w szkole).

O wszystkim tym była mowa w czasie Semestru. Moim zdaniem na czoło wysunęły się dwa tematy:

— uogólnienia teorii rekursji,

— języki uogólnione.

Pokrótce postaram się wyjaśnić, o co tu chodzi.

Pierwsze z wymienionych zagadnień związane jest z analizą pojęcia efektywności. Funkcję $f: N^k \to N$ nazywamy obliczalną (albo rekurencyjną), jeśli jest ona złożeniem skończonej ilości funkcji najprostszych. Przez najprostsze rozumie się następujące trzy rodzaje funkcji:

wszystkie funkcje postaci

$$g(k, l, \dots, m) = n \quad \text{(funkcja stała)},$$

$$I(k, l, \dots, m) = k \quad \text{(funkcja identycznościowa)},$$

$$S(k) = k+1 \quad \text{(następnik)}.$$

Również za obliczalną uznamy funkcję uzyskaną z wymienionych przez utożsamienie zmiennych oraz dwa schematy:

(a) **rekursja prosta**: jeśli f jest obliczalna, to obliczalną jest także funkcja h, określona przez warunki

$$h(0, a) = 0,$$

$$h(n+1, a) = f(n, h(n, a), a);$$

(b) **minimum efektywne**: jeśli f jest obliczalna i spełnia warunek

$$\bigwedge_x \bigvee_y f(x, y) = 0,$$

to obliczalną jest także funkcja h, określona następująco:

$$h(x) = \text{najmniejsze takie } y, \text{ że } f(x, y) = 0.$$

Można to sobie wyobrazić tak: funkcja f jest obliczalna, gdy istnieje „recepta” R (w istocie algorytm) o takiej własności, że jeśli z liczbą n postąpimy według „recepty” R, wówczas jako rezultat otrzymamy liczbę $f(n)$. Obliczalnymi funkcjami są na przykład: dodawanie, mnożenie czy „sito Eratostenesa”. Rozważania na temat funkcji obliczalnych mają istotne znaczenie dla matematyki — choćby słynne

„Sito Eratostenesa” — metoda uzyskiwania liczb pierwszych: W zbiorze liczb naturalnych większych od 1, uporządkowanych rosnąco, powtarzamy następującą operację: pierwszą z nie zaznaczonych liczb (na początku wszystkie są nie zaznaczone) bierzemy w kółko i skreślamy wszystkie jej wielokrotności. Liczby w kółkach to liczby pierwsze.

twierdzenie Gödla (patrz np: E. NAGEL i J. R. NEWMAN, *Twierdzenie Gödla*, «Omega», 52, 1966) o niepełności arytmetyki sformalizowanej, uzyskane tą drogą. Jak to pojęcie uogólniamy? Na przykład rozpatrując funkcje **obliczalne względem danej funkcji** h. Umawiamy się mianowicie, że do grona funkcji obliczalnych dołączamy również h. Jej kombinacje z poprzednio wymienionymi funkcjami mogą istotnie rozszerzyć klasę funkcji obliczalnych. Intuicja może tu być na przykład taka: mamy „czarną skrzynkę" o takiej własności, że jeśli „wrzucimy" do niej liczbę n, to „wyleci" z niej liczba $h(n)$; możność dokonywania obliczeń (być może) istotnie się powiększy. (Zauważmy, że ilość funkcji obliczalnych jest przeliczalna, stąd też względna obliczalność może prowadzić do istotnego powiększenia rozważanej klasy funkcji).

A dalsze uogólnienia? Widać trzy kierunki:

I — stosowanie bardziej skomplikowanych „czarnych skrzynek";
II — rozważanie funkcji o dziedzinach innych niż N;
III — „mieszanie" I i II.

O tym właśnie mówiono w czasie Semestru (i to wiele).

Co jest „modne" w kierunku I? Zasadniczo tak zwane rekursje w obiektach wyższego typu. Co to znaczy? Umówmy się, że liczby naturalne są obiektami typu 0. Obiektem typu $n+1$ nazywamy funkcję o dziedzinie złożonej z obiektów typu n, a zbiorze wartości z obiektów typu 0. Niech A będzie „czarną skrzynką" i niech będzie obiektem typu 7. Liczenie przy jej pomocy — to właśnie rekursja w obiekcie typu 7. Co mianowicie otrzymamy dopuszczając ten typ rekursji? To nie jest pytanie, ale cały worek pytań.

Kierunek II. Przykładem może być tutaj rekursja na tak zwanych liczbach porządkowych dopuszczalnych. Nie zagłębiając się w definicję dopuszczalności przedstawmy ideę. Zbiór uporządkowany liniowo nazwiemy dobrze uporządkowanym, gdy każdy jego niepusty podzbiór posiada element pierwszy (porównaj artykuły A. MOSTOWSKIEGO w numerach 2 i 3 «Delty»). Liczby porządkowe reprezentują zbiory dobrze uporządkowane. Na niektórych (tu owa wspomniana dopuszczalność) można uprawiać teorię rekursji. Co się okazało? Otóż podobnie jak zwykła teoria rekursji okazała się odpowiednikiem rachunku kwantyfikatorów (klasycznej logiki), tak teoria rekursji na liczbach porządkowych odpowiada logice z wyrażeniami nieskończenie długimi. I tu problematyka rekursji doprowadza nas do problematyki języków uogólnionych.

Klasyczna logika operuje wyrażeniami uzyskanymi z tak zwanych atomowych (czyli najprostszych) przez branie koniunkcji, alternatyw, negacji oraz stosowanie kwantyfikatorów, a więc „przedimków" postaci:

istnieje takie x, że ...

bądź:

dla każdego x ... .

Można to uogólniać na przykład tak:

(1) branie nieskończonych koniunkcji i alternatyw,
(2) używanie „nowych" kwantyfikatorów,
(3) rozszerzanie języka o tak zwane zmienne drugiego rzędu.

Zajmijmy się możliwością (1). Zauważmy, że nie jest to w gruncie rzeczy nic nowego. Ot, choćby znane ze szkoły zdanie „Na każdej prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów". Można to napisać jako:

$$(*) \qquad \bigwedge_{l} (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \ldots),$$

gdzie B_n to wyrażenie mówiące: „istnieje co najmniej n punktów na prostej l", czyli

$$\bigvee_{P_1, P_2, \ldots, P_n} (P_1 \neq P_2 \wedge P_1 \neq P_3 \wedge \ldots \wedge P_{n-1} \neq P_n \wedge P_1 \in l \wedge \ldots \wedge P_n \in l).$$

Każde ze zdań B_n to zdanie języka geometrii. Zdanie (*) nie jest natomiast równoważne żadnemu takiemu zdaniu (oczywiście zapisanemu z zachowaniem reguł klasycznej logiki). Ale skoro chcemy go używać — musimy się nim zainteresować. To właśnie jest tematyka (1).

Stąd tylko krok do (2). Zdanie (*) dałoby się sformułować prosto, gdybyśmy dysponowali nowym kwantyfikatorem:

„istnieje nieskończenie wiele takich x, że ..."

(symbolicznie: $\underset{x}{\mathrm{Q}}$). Moglibyśmy wówczas zdanie (*) zapisać:

$$\bigwedge_{l} \underset{P}{\mathrm{Q}} (P \in l),$$

tyle że to już nie byłby klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Cóż jednak w tym złego? Przyjmując pragmatyczną zasadę, że „nic, czego matematyk używa, nie jest

Rozwiązanie zadania **M18**.

Oznaczmy przez S_{12}, S_{13} i S_{23} wyrażone w dcm^2 pola powierzchni zakrytych przez pierwszy i drugi, pierwszy i trzeci oraz drugi i trzeci kawałek papieru. Zachodzi nierówność

$$(1) \qquad 90 \geqslant 3 \cdot 40 - (S_{12} + S_{13} + S_{23})$$

pole powierzchni całego stołu jest co najmniej równe polu powierzchni zakrytej, a to ostatnie jest co najmniej równe $3 \cdot 40 + - (S_{12} + S_{13} + S_{23})$, gdyż pola powierzchni zakrytych dwukrotnie były w iloczynie $3 \cdot 40$ policzone co najmniej dwukrotnie (pole powierzchni zakrytej trzykrotnie było liczone trzykrotnie). Oznaczmy przez S największą spośród liczb S_{12}, S_{13}, S_{23}.
Z nierówności (1) mamy

$$3S \geqslant S_{12} + S_{13} + S_{23} \geqslant 30,$$

skąd $S \geqslant 10$. Istnieją więc dwa kawałki papieru, które pokrywają dwukrotnie powierzchnię co najmniej 10 dcm^2, a więc razem pokrywają one powierzchnię najwyżej $(2 \cdot 40 - 10)$ dcm^2.

obce logikowi", musimy oczywiście badać i takie kwantyfikatory jak Q. Uogólnienie (3) polega na dopuszczeniu (jako wyrażenia poprawnego) kwantyfikatora zbiorów. Na przykład zasada indukcji sformułowana jest przy takim „uogólnieniu" (czyli języku drugiego rzędu) w następujący sposób:

$$(^{**})\qquad \bigwedge_{Z} (0 \in Z \wedge \bigwedge_{x} (x \in Z \Rightarrow (x+1) \in Z) \Rightarrow \bigwedge_{x} x \in Z).$$

Mówimy tu o zbiorach liczb, a nie tylko o samych liczbach. Nie jest to więc wyrażenie arytmetyki sformalizowanej w rachunku kwantyfikatorów. Taka „drobna" zmiana w arytmetyce, jak dopuszczenie kwantyfikatorów wiążących zbiory liczb, czyni z niej teorię kategoryczną, a więc posiadającą dokładnie jeden model (podczas gdy bez używania takich chwytów osiągnąć kategoryczności arytmetyki nie można).
Po omówieniu — pobieżnym siłą rzeczy — spróbujmy uchwycić cechę wspólną wszystkich trzech rozważanych uogólnień języka rachunku kwantyfikatorów. Otóż tym wspólnym elementem jest dążenie do zwiększania środków wyrazu dostępnych w codziennej matematyce.

Tyle krótkiego sprawozdania z Semestru. O problemach, tu zaznaczonych zaledwie, zapisano kilogramy papieru, a znalazłoby się w różnych miejscach świata kilku ludzi, którzy żyją z tłumaczenia innym, co i jak trzeba uogólniać. Niemniej może udało mi się przekazać Czytelnikowi, co w tych dziedzinach się dzieje?

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M16. W rozgrywkach piłkarskich, w których każda drużyna grała z każdą jeden raz, trzy drużyny, które zajęły pierwsze trzy miejsca, zdobyły odpowiednio 7, 5 i 3 punkty (za wygraną otrzymuje drużyna 2 punkty, za remis 1, za przegraną 0). Ile drużyn uczestniczyło w turnieju i po ile punktów zdobyły pozostałe drużyny?
Rozwiązanie na str. 16

M17. Określamy ciąg a_n wzorem $a_n = n^4+4^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Które wyrazy tego ciągu są liczbami pierwszymi?
Rozwiązanie na str. 9

M18. Na stole o powierzchni 90 dcm^2 położono 3 kawałki papieru o powierzchni 40 dcm^2 każdy (żaden kawałek papieru nie wystaje poza krawędź stołu). Udowodnić, że pewne dwa z tych kawałków pokrywają razem powierzchnię stołu o polu nie przekraczającym 70 dcm^2.
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

Gorący okres! Dosłownie, a dla wielu Czytelników również w przenośni. Okres egzaminów maturalnych, wstępnych. Za tych, co zdają, trzymamy kciuki i chociaż powinno to zasadniczo wystarczyć, proponujemy jeszcze rozwiązanie kilku pozornie różnych zadań. Poszukajmy w nich cech wspólnych — pomoże to nam rozwiązywać analogiczne problemy na sali egzaminacyjnej.

F6.

I. Obliczyć okres wahań ciężarka o masie m, zawieszonego na sprężynie o stałej k.

II. Obliczyć czas przelotu ciała o masie m przez tunel w poprzek Ziemi, przechodzący przez jej środek. Uproszczenia: zaniedbujemy opór powietrza, zakładamy kulistość i jednorodność kuli ziemskiej.

III. W rurce o kształcie litery U, o stałym przekroju, znajduje się ciecz. Ciecz wyprowadzona z równowagi waha się przelewając się z jednego ramienia do drugiego. Okres wahań wynosi T. Obliczyć długość słupa cieczy.
Uproszczenia: Zaniedbujemy lepkość cieczy.

IV. Obliczyć indukcję L cewki w układzie generatora LC, jeżeli znany jest okres drgań T i pojemność C kondensatora.
Rozwiązanie na str. 15

Sztuka wygrywania cz. III

Dr Tadeusz B. IWIŃSKI

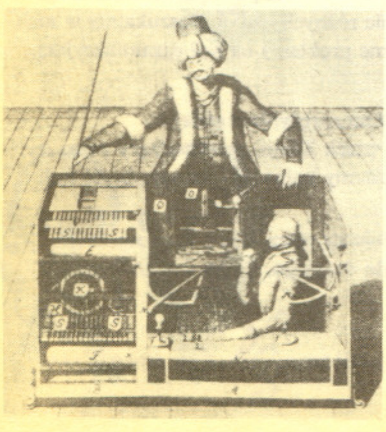
Zasady jednej z odmian gry zwanej grą Morra są następujące: każdy z dwu graczy chowa w dłoni 1 lub 2 zapałki, po czym obaj jednocześnie pokazują to, co mają. Jeśli suma zapałek jest parzysta, to wygrywa gracz pierwszy, jeśli nieparzysta — drugi. Wygrana wynosi tyle punktów, ile jest zapałek łącznie. Wyobraźmy sobie, że rozgrywamy tę grę jako gracz pierwszy. Macierz jej — z naszego punktu widzenia — podana jest obok. Każdy z graczy ma dwie strategie: „pokazać jedną zapałkę" oraz „pokazać dwie zapałki". Nasuwają się dwa pytania: Czy można sformułować jakieś zasady rozsądnego jej rozgrywania? Czy gra jest uczciwa, czy nie jest przypadkiem tak, że jej reguły stawiają jednego z graczy w uprzywilejowanej sytuacji?

$$\begin{array}{cc} & \text{Przeciwnik} \\ & \begin{array}{cc} 1z & 2z \end{array} \\ \text{My} \begin{array}{c} 1z \\ 2z \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Po jednorazowym przeprowadzeniu tej gry nie da się odpowiedzieć na postawione wyżej pytania. Gra nie posiada pary strategii czystych w równowadze («Delta», nr 2); w pojedynczej grze musimy się liczyć z możliwością przegranej 3, a przeciwnik przegranej 2. Przeciwko zastosowaniu którejkolwiek z możliwych strategii przemawia to, że przeciwnik (którego uważamy za równie jak my rozsądnego) może się domyślić, co my myślimy, i odpowiednio do tego zastosować korzystną dla siebie strategię. Przeciwnik jest zresztą w dokładnie takiej samej sytuacji.

Gry tego rodzaju stają się ciekawe dopiero przy wielokrotnym ich rozgrywaniu. A w takim przypadku można, jak się okaże za chwilę, odpowiedzieć na oba pytania: istnieje metoda racjonalnego rozgrywania; przy tym faworyzuje ona przeciwnika i mamy prawo żądać od niego, by za każde 12 rozegranych gier wypłacał nam jeden punkt „ekstra". Dopiero taka dodatkowa umowa daje jednakowe szanse obu stronom. Przy tym odpowiedź na drugie pytanie wynika prosto z odpowiedzi na pytanie pierwsze, którym więc zajmiemy się przede wszystkim.

Jest rzeczą oczywistą, że przy wielokrotnym rozgrywaniu gry żadnemu z graczy nie opłaca się stosować ciągle tej samej strategii — przeciwnik zorientuje się dość szybko i będzie w stanie odpowiedzieć w sposób zapewniający mu wygraną. Należy więc zmieniać, **mieszać** strategie. Nie można jednak tego czynić w sposób systematyczny, przeciwnik bowiem może zorientować się w naszym systemie i, dostosowując swoje wybory do tego systemu, zapewnić sobie wygrane w każdej grze. Pozostaje więc zmieniać strategie w sposób przypadkowy (będziemy mówili: **losowy**). W celu uchronienia się przed jakąkolwiek systematycznością (z której możemy sobie nawet nie zdawać sprawy, ale którą przeciwnik byłby w stanie wykryć) moglibyśmy na przykład posłużyć się rzutem monetą lub kostką do gry, uzależniając wybór strategii od wyniku rzutu.



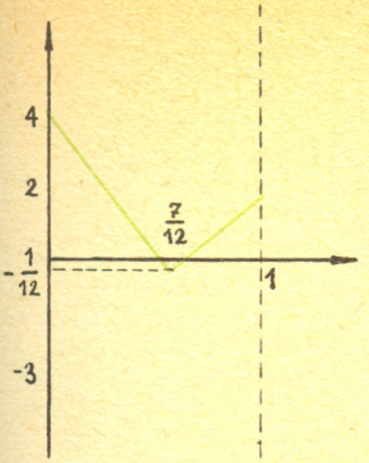
Przypuśćmy na chwilę, że przed każdą rozgrywką rzucamy monetę i stosujemy strategię 1, jeśli wypadnie reszka, a strategię 2, jeśli — orzeł. Wiadomo z doświadczenia, że przy dużej liczbie rzutów „porządną" monetą otrzymuje się mniej więcej połowę orłów i połowę reszek. Uzależnienie wyboru strategii od wyniku rzutu spowoduje więc, że w przybliżeniu w połowie przypadków (tzn. z częstością $\frac{1}{2}$) zastosujemy strategię 1, a w połowie (czyli też z częstością $\frac{1}{2}$) — strategię 2. Wynika stąd, że gdyby przeciwnik stale stosował swą strategię 1, to przy dużej ilości gier zdobywalibyśmy średnio z jednej gry połowę tego, co daje nam nasza strategia pierwsza, i połowę tego, co daje nam nasza strategia druga, a więc:

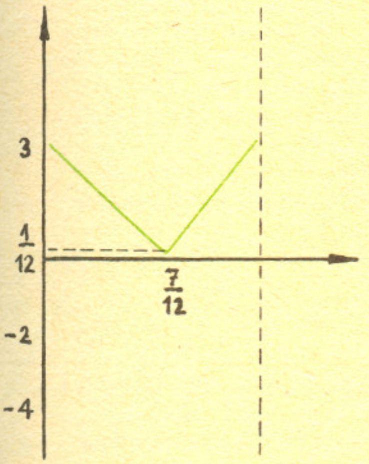
$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{1}{2}$$

punktu (przegrywalibyśmy ilość punktów równą mniej więcej połowie ilości gier). Gdyby natomiast przeciwnik stosował stale strategię 2, to średnio wygrywalibyśmy

$$\frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

punktu (a więc w dostatecznie długich rozgrywkach moglibyśmy oczekiwać wygranej równej mniej więcej połowie ilości gier).





Jednakże przeciwnik nie będzie stale stosował jednej strategii. Gdyby również i on posługiwał się monetą, to można by oczekiwać, że każdy z czterech możliwych wyników pojedynczej gry pojawiałby się w długiej kolejce gier mniej więcej jednakowo często, a więc z częstością $\frac{1}{4}$. Nasza średnia wygrana z jednej gry wynosiłaby więc

$$\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot(-3)+\frac{1}{4}\cdot(-3)+\frac{1}{4}\cdot 4 = 0.$$

Omawianą tu metodę rozgrywania, polegającą na losowym mieszaniu strategii w stosunku 1:1, nazywa się strategią „mieszaną” $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Można oczywiście stosować i inne strategie mieszane. Gdyby na przykład posłużyć się kostką do gry i stosować strategię 1 jedynie w tym przypadku, gdy wypadnie szóstka, to postępowanie takie spowodowałoby mieszanie strategii w stosunku 1:5, a więc zastosowanie strategii $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$. I tak dalej.

Powstaje problem: jakie są najkorzystniejsze strategie mieszane dla każdego z graczy? Nie trudno zauważyć, że możemy się tu posłużyć tymi samymi metodami rachunkowymi, co przy rozwiązywaniu problemu Działkowicza («Delta» nr 4, zob. też zadania 1 i 2). Odpowiednie rachunki wykazują, że każdy z graczy powinien mieszać swe strategie w stosunku 7:5, a więc stosować strategię mieszaną $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$. Dzięki takiemu postępowaniu gracz pierwszy, czyli my, nie przegra średnio więcej niż 1 punkt na 12 gier. Nasz przeciwnik natomiast, stosując swoją strategię mieszaną, zapewni sobie przy najlepszej nawet grze z naszej strony wygraną średnio 1 punktu na tę samą ilość gier. (Obok podajemy rysunki ilustrujące te rozwiązania, a Czytelnika zachęcamy do przeprowadzenia rachunków).

Rozstrzygnęliśmy więc oba postawione na początku problemy: każdy z graczy ma metodę rozsądnego rozgrywania tej gry — jest nią strategia mieszana $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$. Gra stawia gracza 1 w gorszej sytuacji, przynosząc mu średnio „wygraną” $-\frac{1}{12}$ punktu na 1 grę.

Znaleziona para strategii mieszanych nazywa się „rozwiązaniem gry”, a otrzymana średnia wygrana — „wartością gry”.
Można udowodnić, że każda gra $m\times n$ posiada co najmniej jedno rozwiązanie.

Zadania i propozycje

1. Jak przy pomocy monety i kostki do gry można mieszać strategie w stosunku 7:5?
Propozycja: sprawdzić w praktyce zalecenia teorii. Dla zaoszczędzenia czasu w trakcie samej gry można przygotować sobie ściągaczkę, tj. wykonać zawczasu ciąg odpowiednich doświadczeń, wyniki zanotować na kartce i grać z kartki.

2. W trakcie rozgrywek zauważyliśmy, że przeciwnik stosuje (zapewne sam o tym nie wiedząc) mieszankę $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Jak powinniśmy grać przeciw niemu?

3. Rozwiązać podane niżej gry (tzn. znaleźć strategie optymalne i wartości tych gier):

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Propozycja: zastanowić się nad racjonalną metodą gry z przeciwnikiem, który nie zna tej teorii i dobiera strategie zupełnie przypadkowo, mieszając je w różnych okresach gry z różnymi częstościami. Autor oczekuje listów z propozycjami (na adres Redakcji).

Rozwiązania na stronie 15

Rozwiązanie zadań F6. cz. II

Zjawiska z różnych dziedzin fizyki mają ten sam opis matematyczny: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ (uwaga na znak (−)).
Równanie powyższe opisuje ruch harmoniczny. Rozwiązanie ogólne takiego równania jest postaci: $x = A\cos(\omega t+\varphi)$, gdzie A i φ są dwiema stałymi, odpowiednio zwanymi amplitudą i fazą początkową ruchu. Wyznacza się je z warunków początkowych, to jest znajomości położenia i prędkości obiektu w chwili $t = 0$ (wyznaczanie tych wielkości jest niepotrzebne w naszym przypadku).

Oczywiście okres drgań wynosi $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Łatwo znajdziemy odpowiedź na postawione pytania:

1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
2. $T_{\text{spadku}} = 1/2\, T = \pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\varrho}}$
3. $l = \frac{T^2 g}{2\pi^2}$
4. $L = \frac{T^4}{4\pi^2 C}$

Nowe możliwości mikroskopii elektronowej

Doc. dr hab. Edmund IGRAS

MIKROSKOPIA ELEKTRONOWA POZWALA WIDZIEĆ PRZEDMIOTY NIEWIDZIALNE DLA MIKROSKOPII ŚWIETLNEJ

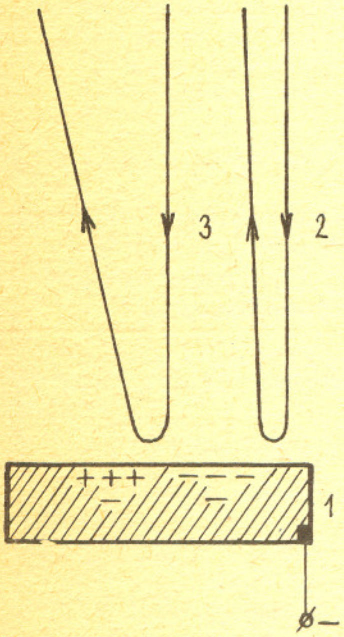
Szczególną cechą każdego mikroskopu jest możliwość zobaczenia przedmiotów niewidzialnych gołym okiem. Jednym z najważniejszych parametrów mikroskopu jest tak zwana zdolność rozdzielcza. Określa ona minimalne rozmiary detali budowy danego obiektu, które można jeszcze zaobserwować. Na przykład za pomocą mikroskopu świetlnego nie można obserwować wielu bakterii z powodu ich zbyt małych rozmiarów. Przyczyną fizyczną ograniczającą zdolność rozdzielczą mikroskopu świetlnego jest rozmycie szczegółów obrazu wskutek dyfrakcji światła. Im krótsze fale, tym mniejsze rozmycie, a więc — większa zdolność rozdzielcza.
Z kolei w mikroskopie elektronowym bakterie i wirusy stają się widzialne. Mało tego, mikroskop elektronowy pozwala uzyskać obrazy szczegółów wewnętrznej budowy bakterii i wirusów. Dzieje się tak dlatego, że zdolność rozdzielcza współczesnych mikroskopów elektronowych osiąga wartość zaledwie kilku stumilionowych części centymetra (zdolność rozdzielcza mikroskopu świetlnego jest około 500 razy gorsza). Innymi słowy, mikroskop elektronowy pozwala obserwować mikroszczegóły około 500 razy mniejsze niż jest to możliwe przy użyciu mikroskopu świetlnego. Wiązkę elektronów, która w mikroskopie elektronowym zastępuje światło, można potraktować też jak falę. Długość fali elektronowej jest tym mniejsza, im szybciej biegną elektrony.
Przyspieszając więc elektrony do odpowiedniej prędkości, otrzymujemy falę elektronową o odpowiedniej małej długości, dzięki czemu uzyskujemy znaczne polepszenie zdolności rozdzielczej.

JAK ZBUDOWAĆ MIKROSKOP POZWALAJĄCY WIDZIEĆ SZCZEGÓŁY PRZEDMIOTÓW RÓŻNIĄCE SIĘ WŁAŚCIWOŚCIAMI ELEKTRYCZNYMI LUB MAGNETYCZNYMI?

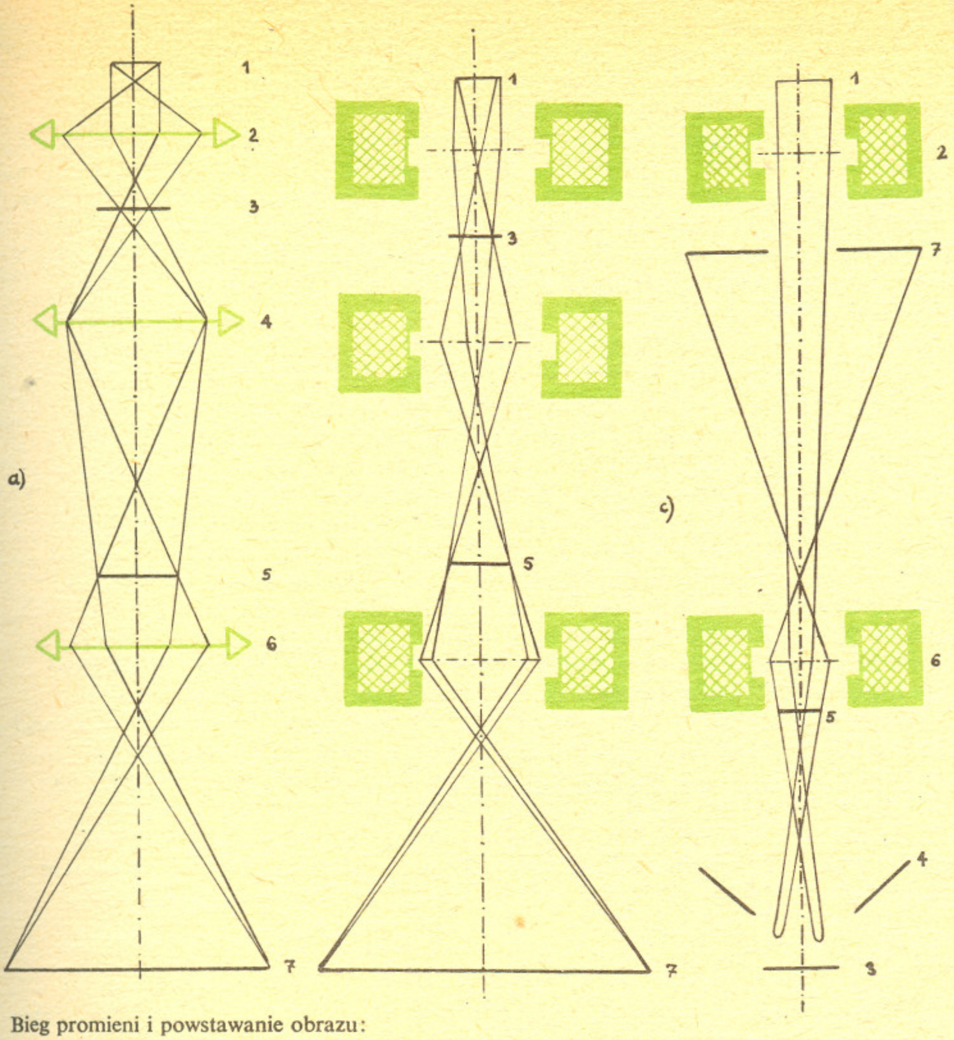
Nie tylko zdolność rozdzielcza jest istotną cechą danego mikroskopu. Obecnie konstruowane są mikroskopy do celów specjalnych. Służą one do lokalizacji obszarów charakteryzujących się różnymi właściwościami fizyko-chemicznymi. Zdolność wykrywania takich obszarów jest również cennym parametrem mikroskopu. Można zbudować mikroskop, który będzie wytwarzać obrazy miejsc obiektu różniących się przewodnictwem elektrycznym i własnościami magnetycznymi; mikroskop taki wykryje na przykład różnice nagromadzenia ładunków elektrycznych, ukaże subtelne szczegóły struktury elektrycznej materiału próbki. W jaki sposób zbudować taki mikroskop i jakich cząstek użyć do oświetlenia obiektu? Oczywiście muszą to być cząstki, które będą oddziaływać z obszarami o wymienionych wyżej właściwościach. Takimi cząstkami są elektrony. Elektronom można nadawać różne prędkości. Czyni się to za pomocą dobierania odpowiednich wartości napięć elektrycznych przyspieszających ruch elektronów. Jeżeli chcemy wykryć bardzo słabe pole elektryczne lub magnetyczne za pomocą obserwacji zachowania się strumienia elektronów w pobliżu tych pól, to należy tak pokierować strumieniem elektronów, ażeby ich tory zostały maksymalnie zakłócone. Można to uzyskać tylko wtedy, gdy prędkości elektronów będą minimalne w pobliżu poszukiwanych zakłóceń. Czas przebywania elektronów w pobliżu zakłóceń jest wtedy dłuższy, co powoduje silniejsze zakrzywienie ich torów.

POWOLNE ELEKTRONY DAJĄ NAJDOKŁADNIEJSZĄ INFORMACJĘ

Wyobraźmy sobie, że za pomocą odpowiedniego napięcia elektrycznego nadaliśmy strumieniowi elektronowemu określoną prędkość. Przypuśćmy, że ten strumień skierowany jest ku powierzchni pewnej próbki, do której możemy przykładać różne wartości napięcia elektrycznego. W szczególnym przypadku — gdy pole elektryczne wytworzone przy próbce posiada taki kierunek, że będzie działać siłą odpychającą na zbliżające się elektrony — przy odpowiednio dobranej wartości tego pola można nie dopuścić elektronów do powierzchni naszej próbki. Innymi słowy: można strumień elektronowy całkowicie wyhamować, zawrócić go i przyśpieszyć w przeciwną stronę. W okolicach punktów, gdzie elektrony zmieniają silnie kierunek ruchu, posiadają one bardzo małe prędkości. Jeżeli punkty, w których następuje zmiana kierunku ruchu elektronów, leżą bardzo blisko powierzchni badanej próbki, to takie elektrony będą doskonałymi



Uproszczony szkic powstawania obrazu lokalnego nagromadzenia ładunków elektrycznych przy powierzchni próbki oglądanej w zwierciadlanym mikroskopie elektronowym: 1 — próbka podłączona do ujemnego bieguna źródła napięcia elektrycznego; 2 i 3 — tory elektronów dochodzących do powierzchni próbki i odchodzących od niej dzięki odpychającemu polu elektrycznemu; 2 — tor elektronu, którego ruch przy powierzchni próbki nie został zakłócony; 3 — tor elektronu, który został zakłócony przez obecność dodatnich i ujemnych ładunków elektrycznych na powierzchni próbki. W wyniku takiego zakłócania torów elektronów przez niejednorodności elektryczne na powierzchni próbki — w różnych miejscach ekranu fosforescencyjnego mamy różną gęstość elektronów przynoszących informację. Dzięki temu ekran ten świeci w danym miejscu mniej lub bardziej intensywnie dając niejako mapę elektryczną próbki.



Bieg promieni i powstawanie obrazu:

a) w mikroskopie świetlnym;

b) w prześwietleniowym mikroskopie elektronowym;

c) w zwierciadlanym mikroskopie elektronowym

Rysunek przedstawia przekrój biegu promieni i soczewek

1 — źródło światła (w mikroskopie świetlnym) lub elektronów (w mikroskopie elektronowym);

2 — skupiająca światło soczewka kondensatora lub, w przypadku mikroskopu elektronowego, elektrony na oglądanym przedmiocie 3;

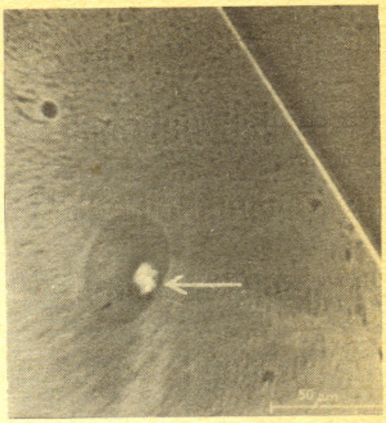
4 — soczewka obiektywu, dająca obraz 5 pierwszego stopnia powiększenia;

6 — soczewka projektora powiększająca dodatkowo obraz 5;

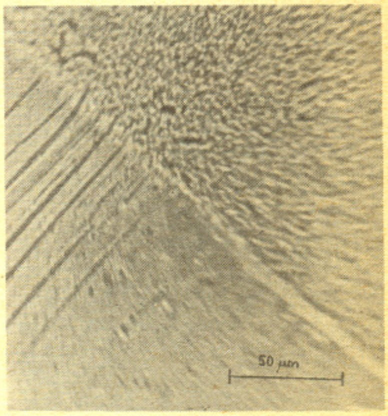
7 — obraz końcowy oglądany na odpowiednim ekranie

W przypadku mikroskopu elektronowego strumień elektronów skupiają soczewki magnetyczne lub elektrostatyczne. Na rysunku wszystkie soczewki elektronowe, z wyjątkiem obiektywu mikroskopu zwierciadlanego, są typu magnetycznego. Soczewka obiektywu mikroskopu zwierciadlanego jest typu elektrostatycznego. Soczewka magnetyczna składa się z bardzo wielu (rzędu dziesiątek tysięcy) uzwojeń, przez które płynie stały prąd elektryczny. Uzwojenia w w soczewkach przedstawione są przez obszar zakreskowany. Uzwojenia te znajdują się w obudowie z magnetycznego materiału, np. żelaza (na rysunku — grube odcinki). Obudowa magnetyczna posiada przerwę. W obszarze przerwy pole magnetyczne dochodzi do przestrzeni strumienia elektronów i działa nań skupiająco. Odległość ogniskową soczewki można płynnie zmieniać przez zmianę natężenia pola magnetycznego, co realizuje się przez regulację natężenia prądu w uzwojeniach soczewki.

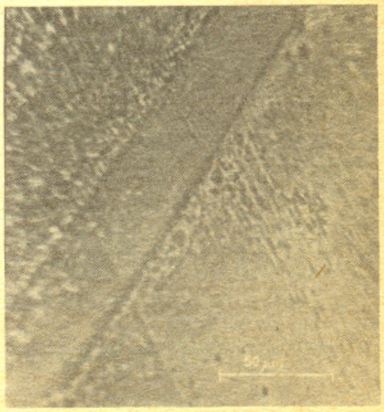
Soczewki elektrostatyczne — to odpowiedniego kształtu przesłony metalowe, do których przykłada się napięcia elektryczne. Pole elektryczne w pobliżu otworu przesłony decyduje o skupiających właściwościach soczewki tego typu.



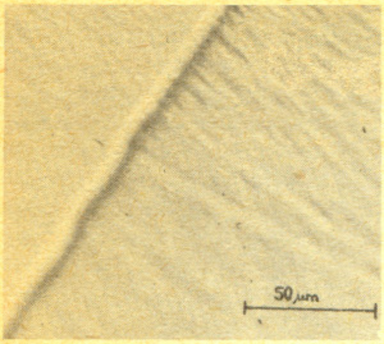
Obraz (elektryczny) złącza *p–n* w krzemie. Złącze wykonano metodą inplantacji boru w krzemie typu *n* (metoda inplantacji polega na wstrzeliwaniu jonów domieszki, rozpędzonych w polu elektrycznym). Strzałka wskazuje niejednorodność elektryczną w części powierzchni typu *p*



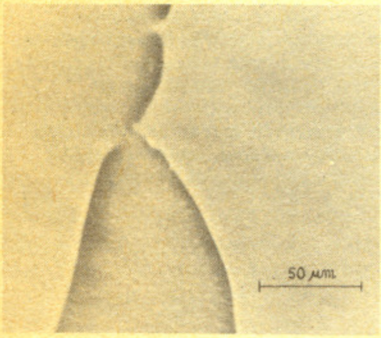
Granica między obszarami krzemu o różnym przewodnictwie elektrycznym. Na powierzchni tych obszarów widoczna jest powierzchniowa struktura elektryczna



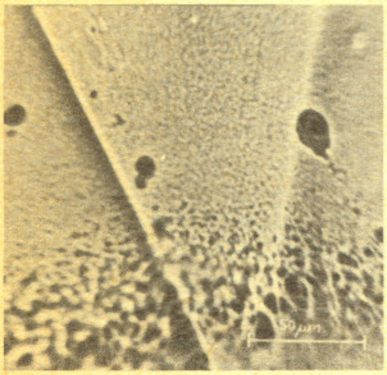
Obraz (elektryczny) powierzchni krzemu z wąskim paskiem o odmiennym przewodnictwie elektrycznym niż części sąsiadujące



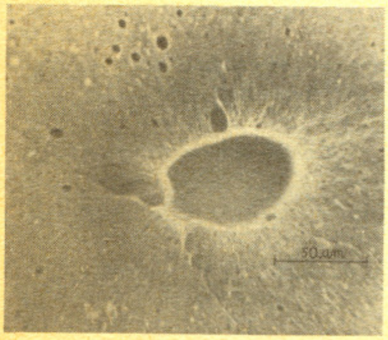
Obraz (elektryczny) bariery *p–n* na powierzchni krzemu



Obraz (elektryczny) rozgałęzionego złącza *p–n* w krzemie



Obraz (elektryczny) dwóch złącz o różnym kontraście spowodowanym różną koncentracją domieszkowych atomów fosforu w krzemie typu *p*



Obraz części warstwy powierzchniowej krzemu, w której zmienił się typ przewodnictwa (obszar eliptyczny) w wyniku bombardowania jonami gazów. Jony te neutralizowały aktywność elektryczną domieszkowanych atomów galu, wprowadzonych uprzednio do warstwy powierzchniowej

informatorami o sytuacji dotyczącej rozkładu potencjału elektrycznego przy powierzchni próbki, wykryją ewentualne różnice namagnesowania różnych punktów powierzchni, lokalne nagromadzenia ładunków elektrycznych itp. W przypadku lokalnych zmian pola elektrycznego, przy obserwowanej powierzchni mamy do czynienia z elektrostatycznym przyciąganiem i odpychaniem powolnych elektronów. Tory tych elektronów będą pozmieniane zależnie od kształtu i rozkładu pól elektrycznych. W przypadku pola magnetycznego działa na elektrony tak zwana „siła Lorentza", której wartość jest proporcjonalna do natężenia pola i składowej prędkości w kierunku prostopadłym do kierunku pola magnetycznego, a kierunek — prostopadły i do natężenia pola, i do kierunku ruchu elektronów.

CZY TO JUŻ NOWY RODZAJ MIKROSKOPU ELEKTRONOWEGO?

To, co powiedziano przed chwilą, określa zasadę działania specjalnego rodzaju mikroskopu elektronowego, zwanego mikroskopem zwierciadlanym. Za pomocą tego mikroskopu można uzyskiwać obrazy rozkładu ładunku elektrycznego na powierzchni próbki, zmian spadków napięć elektrycznych wzdłuż próbki, spowodowanych zmianami przewodnictwa, obrazy zmian namagnesowania itp. Ale w jaki sposób otrzymać powiększony obraz? W celu uzyskania powiększonego obrazu stosuje się specjalne soczewki elektronowe. Składają się one zwykle z zestawów kilku przesłon metalowych. Jeżeli do tych przesłon przyłoży się odpowiednie napięcia, to wytworzone między przesłonami pole elektryczne działa na elektrony skupiająco lub rozpraszająco, podobnie jak w przypadku fal świetlnych działają soczewki szklane. W celu skupienia wiązki elektronowej można również zastosować soczewki magnetyczne. Są to odpowiednie uzwojenia, przez które przepuszcza się prąd elektryczny. Wytworzone dzięki przepływowi prądu pole magnetyczne działa na elektrony jak soczewka. Takie soczewki powiększają niesiony przez strumień elektronowy obraz, który można oglądać na ekranie świecącym pod wpływem uderzających weń elektronów (podobnie, jak się to dzieje na przykład na ekranie telewizora).

DO CZEGO JEST POTRZEBNY ZWIERCIADLANY MIKROSKOP ELEKTRONOWY?

Mikroskop ten potrafi uczynić widzialnym to, co jest niewidzialne przy zastosowaniu innych rodzajów mikroskopów, w tym również mikroskopów elektronowych. Mamy więc możliwość rozszerzenia badawczych perspektyw mikroskopii. Zwierciadlany mikroskop elektronowy posiada szczególne znaczenie przy badaniu powierzchni materiałów półprzewodnikowych. Jak wiadomo, materiały te stanowią podstawę współczesnej elektroniki. Większość przyrządów półprzewodnikowych działa na zasadzie wykorzystania efektów fizycznych występujących na stykach między częściami materiału o różnych własnościach elektrycznych. Mikroskop zwierciadlany pozwala dokładnie zbadać występujące na wspomnianych stykach pola elektryczne. Mikroskop zwierciadlany potrafi dać informację pozwalającą tak sterować technologią elektronicznych elementów półprzewodnikowych, ażeby elementy te miały lepsze parametry i były bardziej niezawodne.

MIKROSKOP ZWIERCIADLANY ODKRYWA NOWE ZJAWISKA

Dla pewnych celów na powierzchni kawałka półprzewodnika, na przykład typu *n*, wytwarza się cieniutką warstewkę typu *p*; między warstewką a podłożem powstaje więc złącze *p–n*. Na przykład w krzemie typu *n* osiąga się taką zmianę przewodnictwa przez wprowadzenie doń atomów galu. Gal jest trójwartościowy, krzem natomiast — czterowartościowy. Atomy galu, zastępując atomy krzemu w sieci krystalicznej, odbierają więc tym ostatnim po jednym elektronie. W ten sposób powstaje luka w obsadzie stanów elektronowych. Nazywa się ją dziurą. W polu elektrycznym dziura taka zachowuje się jak dodatni nośnik prądu elektrycznego (na marginesie może warto przypomnieć, że w półprzewodniku typu *n* przeważają elektrony swobodne, w półprzewodniku typu zaś *p* — owe dziury).
Otóż, badając strukturę elektryczną takich warstewek w mikroskopie elektronowym w Katedrze Fizyki i Elektroniki Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie, udało się odkryć zupełnie nowe zjawisko fizyczne. Polega ono na bardzo nietypowym zachowaniu się domieszek galu w krzemie. Mianowicie atomy galu w krzemie, pod wpływem bombardowania (nawet bardzo słabego) powierzchni krzemu domieszkowanego galem, jonami lub innymi cząstkami o wysokiej energii, przestają być elektrycznie aktywne, czyli przestają wytwarzać dziury (nośniki

Rozwiązanie zadania M17.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to a_n jest liczbą parzystą większą od 2, a więc złożoną. Jeżeli zaś n jest liczbą nieparzystą: $n = 2k+1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), to $a_{2k+1} = (2k+1)^4 + 4^{2k+1} = (2k+1)^4 + 4 \cdot 4^{2k} = (2k+1)^4 + 4 \cdot (2^k)^4$. Zachodzi jednak tożsamość:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2),$$

z której wynika, że a_{2k+1} jest iloczynem dwóch liczb naturalnych. Może to więc być liczba pierwsza tylko wtedy, gdy mniejszy z czynników będzie miał wartość bezwzględną równą 1, a więc gdy dodatnia liczba $(2k+1)^2 + -2(2k+1) \cdot 2^k + 2 \cdot (2^k)^2 = (2k+1-2^k)^2 + (2^k)^2$ będzie równa 1. Musi więc być $2^k = 1$, $k = 0$, i rzeczywiście $a_1 = 1^4 + 4^1 = 5$ jest liczbą pierwszą, jedyną w ciągu (a_n).

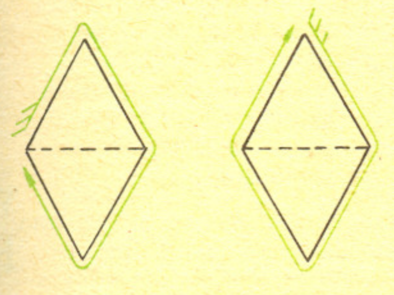
prądu) w krzemie (choć nie wpływa to na wygląd próbki). Łatwo to zauważyć w mikroskopie zwierciadlanym, gdyż ukazuje on nie sam widok powierzchni, lecz rozkład pola elektrycznego przy powierzchni. Łatwo też te efekty zmierzyć, gdyż zmianie liczby nośników prądu musi towarzyszyć zmiana oporu elektrycznego cienkiej warstwy powierzchniowej próbki (w tym miejscu, gdzie operuje wiązka jonów).

Zjawisko to tłumaczymy sobie następująco. Atomy galu wprowadzone do krzemu lokują się w węzłach sieci krystalicznej, zastępując tam atomy krzemu (a więc — tworząc też wiązania chemiczne z sąsiednimi atomami kryształu). Bombardujące próbkę jony lub cząstki wysokiej energii wdzierają się do niej i tam wybijają atomy galu z ich położeń w węzłach sieci do położeń międzywęzłowych. W takich położeniach atomy galu „czują się" jak przysłowiowe piąte koło u wozu. Nie zastępując już atomów krzemu w sieci, nie tworzą też wiązań chemicznych z innymi atomami, a więc nie wytwarzają dziur. Im więc silniejsze jest i dłużej trwa bombardowanie, tym więcej atomów galu jest wytrąconych z położeń węzłowych (do położeń międzywęzłowych); zmniejsza się więc liczba nośników prądu, a więc musi zmieniać się opór powierzchniowy próbki. Pomiary zmian powierzchniowego oporu próbki krzemu z cieniutką warstewką zawierającą atomy galu umożliwiają więc wyznaczenie dawki jonów (lub innych cząstek o wysokiej energii) pochłoniętych przez próbkę. O tę zasadę oparliśmy działanie nowego rodzaju bardzo czułego i bardzo małego dozymetru promieniowania jonizującego.

Jeśli próbka jest przez długi czas poddana działaniu dostatecznie silnego strumienia jonów, to oczywiście wszystkie atomy galu zostaną w niej elektrycznie zneutralizowane i cienka warstewka krzemu nasycona galem (a więc typu p) powróci do swych pierwotnych własności, czyli znów będzie typu n. W ten sposób odpowiednio cieniutką wiązką jonów można na niej „rysować", niczym ołówkiem na papierze, „kreski" typu n, czyli — wytwarzać powierzchniowe złącza n–p w bardzo dużych ilościach na bardzo małym obszarze. Być może znajdzie to zastosowanie do wytwarzania mikroskopijnych złącz n–p lub do zapisu informacji.

Zjawisko jest odwracalne w tym sensie, że skutki działania jonów na atomy galu w próbce można całkowicie zniweczyć. Wystarczy w tym celu podgrzać próbkę do temperatury około +200°C. Wtedy, wskutek silniejszych drgań cieplnych, atomy galu znów „powskakują" do węzłów sieci i wszystko powróci do stanu sprzed bombardowania próbki jonami.

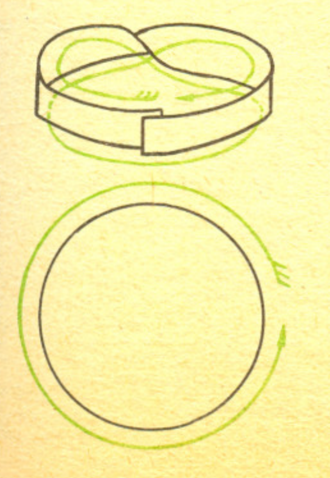
Nie wiemy jeszcze, dlaczego zjawisko to występuje tylko w krzemie domieszkowanym galem. Czyżby mogło ono powstawać jedynie w pewnych szczególnych warunkach, które spełnione są akurat w przypadku krzemu z galem jako domieszką, a w innych badanych przez nas przypadkach — nie? Jakie to ewentualnie mogą być warunki i w jaki sposób są określone przez wzajemne oddziaływanie atomów domieszek z atomami macierzystymi półprzewodnika?



Suwak od starej kurtki

również może być „przyborem" do uprawiania matematyki. Wytnijmy np. z grubszego filcu dwie jednakowe figury (jak na rysunku) i przyszyjmy jedną z części suwaka do pierwszej figury, a drugą do drugiej (również według wskazań rysunku). Wymiary figury ustalamy na podstawie długości suwaka. Linia przerywana oznacza załamanie filcu — aby je uzyskać, możemy złożyć wycięte figury wzdłuż tej linii i włożyć na pewien czas np. między książki albo przeprasować. Jeśli teraz zapniemy suwak, to otrzymamy czworościan.

Pytanie: Czy można (ewentualnie — jak?) uzyskać przez „zapinanie" sześcian? A inne wielościany foremne?



Weźmy teraz wąski pasek jakiejś cieńszej materii, nieco dłuższy od połowy suwaka. Gdy zszyjemy pasek według rysunku, otrzymamy wstęgę Möbiusa. Figura ta odznacza się tym, że jest jednostronna — co nas zresztą tu nie interesuje — i ma tylko jeden brzeg, co jest istotne, bo przyszywamy doń jedną z części suwaka. Drugą przyszywamy do brzegu koła odpowiedniej wielkości (wyciętego z tego samego materiału). Proszę teraz zapiąć. Nie da się? — to dobrze, gdyby się bowiem zapięło, mielibyśmy w ręku figurę czterowymiarową. Choć właściwie i tak mamy ją w ręku, tylko nieco „rozpiętą".

M.

Uwaga! Redakcja nie bierze odpowiedzialności za skutki używania suwaków z nowych kurtek.

mała delta

Najmłodsi entuzjaści matematyki i fizyki! Wasi starsi koledzy ofiarowali Wam na Dzień Dziecka 4 strony «Delty». «Mała Delta», bo tak będzie się nazywał Wasz kącik, zaprasza do wspólnej zabawy. Starsi mają wstęp tylko w Waszym towarzystwie.

Od 1 stycznia 1975 roku «Małą Deltę» znajdziecie w każdym numerze.

Czy umiecie się dziwić?

Czy umiecie patrzeć i słuchać? Czy umiecie się dziwić? To wcale nie proste. Wielu dorosłych tego nie potrafi. Najlepiej robią to niemowlęta. Jakiż zachwyt maluje się na buzi Waszej małej siostrzyczki lub braciszka, gdy ogląda paluszki, bada je, zgina, smakuje! Chce sprawdzić: może nadają się do jedzenia? A Wy? Od kilku lat jesteście w szkole. Sporo już umiecie, a niejeden z Was chwali się: „O, mnie to niełatwo zadziwić". Jeżeli tak jest naprawdę, to bardzo niedobrze. Chociaż masz niewiele ponad dziesięć lat, jesteś stary, bardzo stary, bo świat jest ciekawy i zadziwiający, a ty już tego nie widzisz, nie słyszysz i nie czujesz. Widzieć, słyszeć i stale się dziwić — to znaczy być przyrodnikiem. To nie jest ważne, czy damy mu „uczoną" nazwę: fizyk, chemik, biolog, matematyk. Jest to człowiek, który widzi zadziwiające rzeczy tam, gdzie inni przechodzą obojętnie. Nieważne, czy patrzy się gołym okiem na kałużę idąc z rodzicami na spacer, czy siedzi w laboratorium i korzysta z bardzo złożonej aparatury.

W kałuży wody zabrudzonej benzyną widać niekiedy piękne barwy tęczy. Można przebiec po niej rozpryskując krople wody, nie zauważając barw. Ot, widziało się to tyle razy. Można też przebiec rozpryskując krople ale dziwić się. Dlaczego widzę kolory? Dlaczego woda leci kropelkami, a nie strużkami? Dlaczego woda leci w ogóle, przecież nikt jej do góry nie podrzucał?

Dziwne rzeczy dzieją się wszędzie. Na każdym kroku jest coś, czego nie rozumiemy. Jeżeli szukasz wytłumaczenia tego, czego nie rozumiesz w książkach, jeżeli pytasz innych — to dobrze, bo uczysz się dla zaspokojenia własnej ciekawości. Jeżeli cieszysz się ze zrozumienia każdej nowej rzeczy, jeżeli widzisz piękno świata — to jeszcze lepiej, bo jesteś prawdziwym badaczem.

Niezwykła lekcja

Zbliżał się koniec roku szkolnego. Od paru dni było gorąco i słonecznie. Mikołajowi i jego kolegom trudno było wysiedzieć w szkole. Pewnego dnia wychowawca przyszedł do klasy i powiedział: — Jutro zamiast do szkoły pójdziemy wszyscy na basen. Będziemy się kąpać i bawić. Za to następną lekcję przyrody poprowadzicie sami. Na tej lekcji każdy powie, jakie ciekawe zjawiska zauważył na basenie i postara się je wytłumaczyć.

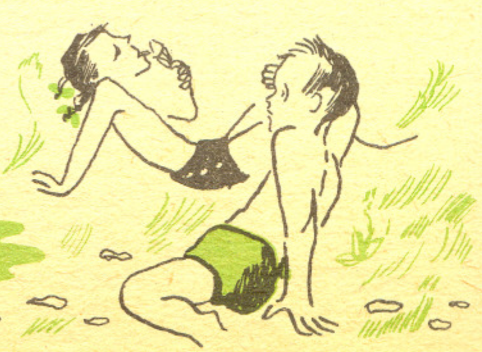
Była to bardzo udana lekcja. Oto niektóre problemy uczniów:

CZY WODA BYŁA NAPRAWDĘ ZIMNA?

Maciek był bardzo zdziwiony:

— Kiedy przyszliśmy na basen — powiedział — przeczytaliśmy na tablicy, że temperatura wody była taka, jak temperatura powietrza, czyli $+25°C$. To musiała być pomyłka! Zanurzyłem w wodzie nogę i woda okazała się strasznie zimna. Wolałem zostać na brzegu.

— Mnie się wydaje, że to powietrze było zimniejsze od wody — powiedział Mikołaj, który lubił skakać do wody ze słupka. Ile razy wyszedłem z wody, robiło mi się zimno i musiałem szybko wskakiwać z powrotem, żeby nie zmarznąć.



— To teraz już wszystko rozumiem — powiedział Maciek. — Nie było żadnej pomyłki na tablicy. Woda miała taką temperaturę, jak powietrze. Mnie się wydawało, że jest zimniejsza dlatego, że woda łatwiej niż powietrze odbiera ciepło od ciała. W dodatku przed wchodzeniem do wody poleżałem trochę na słońcu i byłem bardzo rozgrzany. Natomiast po wyjściu z wody powietrze wydaje się zimniejsze. Dzieje się tak dlatego, że mokre ciało paruje, przez co traci ciepło.

KRÓTKIE NOGI

Krysia, która nie umie pływać, stała w rogu basenu i przyglądała się innym. Ze zdziwieniem spostrzegła, że stojące obok w wodzie do pasa koleżanki mają dziwnie krótkie nogi. Zresztą jej własne stopy też wydawały się trochę za blisko... Powiedziała o tym na lekcji.
— To normalne, wszystkie przedmioty zanurzone w wodzie wydają się krótsze!
— Woda też wydaje się płytsza, niż jest! — posypały się głosy kolegów. Nikt jednak nie kwapił się z wytłumaczeniem tego „normalnego" zjawiska. Wreszcie Wacek, który świetnie rysował, natomiast na lekcjach przyrody zawsze siedział ze strachu pod ławką, podszedł do tablicy i zrobił rysunek, który wszystko wyjaśnił.

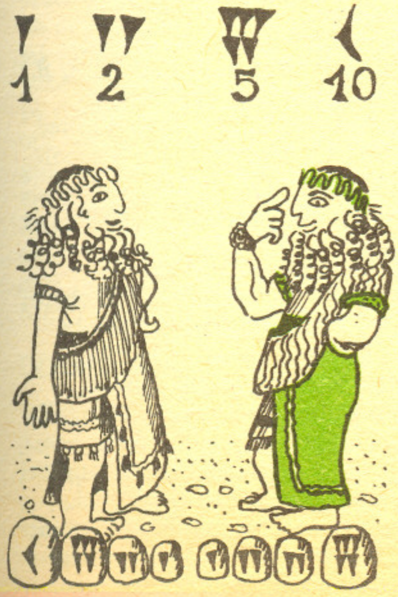
CZY WODA JEST TWARDA?

Pytanie to zadał nauczyciel. Wszyscy się roześmiali. Wszyscy, z wyjątkiem Mikołaja, któremu nie udał się jeden skok do wody. Klapnął wtedy na wodę całą powierzchnią brzucha. On jeden wiedział, jak bardzo twarda jest woda.

Mówimy, że ciało jest miękkie, jeśli łatwo daje się ścisnąć; w przeciwnym zaś wypadku — twarde. Fizycy nazywają tę cechę ciał ściśliwością. Otóż gdyby ktoś z Was miał w naczyniu pod tłoczkiem wodę i opuszczał tłok, przekonałby się, że kiedy tłok osiągnie poziom wody, trudno go dalej obniżyć. Woda nie daje się ścisnąć. Jest bardzo „twarda"! Gdybyście to samo zrobili z grudką ziemi, okazałoby się, że łatwiej jest zmniejszyć objętość ziemi niż wody.

A więc woda jest twardsza od ziemi! Na szczęście dla Mikołaja woda ma tę właściwość, że cząsteczki jej poruszają się dość swobodnie. Dlatego woda częściowo „usunęła się" spod niego, co złagodziło to „twarde lądowanie".

Spór na rynku w Babilonie



Na rynku w Babilonie dwóch kupców, Nabonit i Enkidu, sprzedawało swoje towary. Łączyła ich wielka przyjaźń, ale też przy lada okazji lubili się sprzeczać i kłócić. Ostatnio powstał między nimi spór o sposób ważenia towarów. Obaj przyjaciele ważyli kładąc na jednej szalce wagi odważniki, a na drugiej towary. Enkidu używał czterech odważników, Nabonit również czterech, ale odważniki Enkidu różniły się od odważników Nabonita ciężarem. Enkidu używał następujących odważników: jeden o ciężarze 1 miny (mina to jednostka ciężaru na rynku w Babilonie), dwa odważniki po 2 miny i jeden o ciężarze 5 min. Natomiast Nabonit posługiwał się odważnikami o ciężarach: 1 mina, 2 miny, 5 min, 10 min.

— Mój komplet odważników jest lepszy — twierdził Nabonit — bo moimi odważnikami mogę odważyć nawet 18 min, a ty swoimi odważnikami zważysz najwyżej 10 min.

— Masz rację — odpowiedział Enkidu — ale ja zważę swoimi odważnikami każdy towar o ciężarze od 1 do 10 min. Jeśli mam zważyć większą ilość towaru, odważam je najpierw porcjami po dziesięć min, a na końcu resztę. Natomiast ty swoimi odważnikami nie potrafisz zważyć ani 4, ani 9 min!

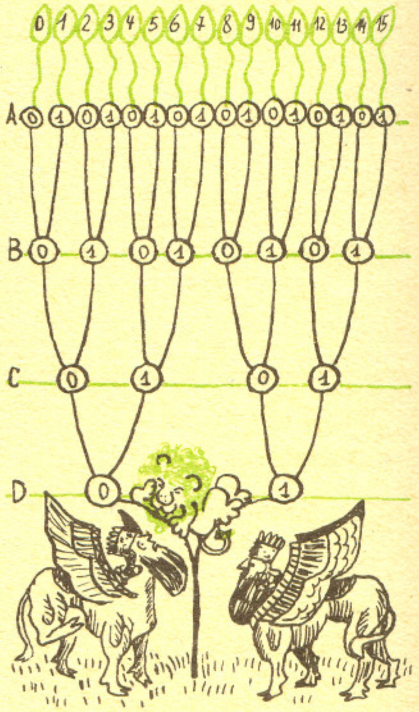
Ich spór trwałby zapewne aż do dzisiaj, gdyby w końcu nie zdecydowali, że pójdą do biblioteki, pełnej bardzo mądrych glinianych tabliczek o matematyce (w owym czasie nie znano jeszcze książek), i spróbują dowiedzieć się z nich, jaki jest

najlepszy sposób ważenia. Siedzieli w bibliotece codziennie przez cały tydzień, czytając bardzo ciekawe tabliczki, a kiedy wrócili na rynek do swoich kramów, wyrzucili zaraz stare odważniki i zastąpili je nowymi.

— Nikt na całym rynku w Babilonie nie ma teraz lepszego kompletu odważników niż my — chwalili się głośno obaj przyjaciele.

Ponieważ o ich sporze słyszeli już niemal wszyscy w Babilonie, znalazło się wielu ciekawych, którzy chcieli się dowiedzieć, czego Nabonit i Enkidu nauczyli się siedząc cały tydzień w bibliotece i jak wygląda ich słynny komplet odważników. Nasi kupcy z wielką ochotą tłumaczyli wszystkim ciekawym, na czym polega nowy sposób ważenia.

— Chcieliśmy dobrać cztery takie odważniki, żeby za ich pomocą można było zważyć każdą ilość towaru, i to od jednej miny aż do tylu, jak tylko jest to możliwe. Możliwości odważenia różnych ciężarów jest tyle, ile różnych zestawów da się ułożyć z czterech odważników. Uczyliśmy się matematyki cały tydzień i teraz już wiemy, że z czterech odważników da się ułożyć tylko 15 różnych zestawów przydatnych do ważenia, o czym zaraz wszystkich przekonamy. Oznaczmy cztery odważniki (nie wiemy jeszcze, po ile min mają one ważyć) czterema literami *A*, *B*, *C*, *D* i ustawmy je w pewnej kolejności. Najwygodniej nam będzie ustawić je tak: *D*, *C*, *B*, *A*. Będziemy teraz układali wszystkie możliwe zestawy tych odważników i rysowali je na specjalnym „matematycznym drzewku".



Tu Enkidu narysował na piasku „matematyczne drzewko" — takie, jakie na rysunku obok.

— Każda gałąź drzewka oznacza jeden z możliwych zestawów odważników — objaśnia Enkidu sporemu tłumowi ciekawych. — Idąc po drzewku od podstawy do jednego z wierzchołków ponumerowanych liczbami od zera do piętnastu, przecinamy po drodze cztery linie: *D*, *C*, *B*, *A*. Zestaw odważników układamy następująco: jeśli na linii *D* spotkamy po drodze zero, to do zestawu nie dobieramy odważnika oznaczonego literą *D*. Ale jeśli spotkamy jedynkę, wówczas włączamy ten odważnik do zestawu. Podobnie będziemy postępować na liniach *C*, *B* i *A*.

Na przykład po drodze, która kończy się wierzchołkiem oznaczonym numerem 11, napotykamy kolejno: na linii *D* jedynkę (bierzemy odważnik *D*), na linii *C* zero (nie bierzemy odważnika *C*), na linii *B* jedynkę (bierzemy odważnik *B*) i na linii *A* jedynkę (bierzemy odważnik *A*). Przebytą drogę można zapisać: 1011. Zapis ten oznacza, że zestaw jedenasty składa się z odważników *DBA* (nie ma w nim jedynie odważnika *C*, bo tylko na drugim miejscu w tym zapisie jest zero).

(Tłumacz wie o tym, że Babilończycy zera nie znali — ale Czytelnicy przecież zero znają).

— Przechodząc od linii do linii zawsze napotykamy rozwidlenie dróg. Jedna z dróg rozwidlenia prowadzi do jedynki, a druga do zera. Oznacza to, że do jednego z zestawów będziemy brali kolejny odważnik, a do drugiego nie. Są to już wszystkie możliwości. A więc wszystkich zestawów jest dokładnie tyle, ile ma gałęzi „matematyczne drzewko". Tylko jedna z gałęzi nie przyda się do ważenia, tj. ta, która się kończy w wierzchołku oznaczonym zerem. Idąc drogą do wierzchołka zerowego nie weźmiemy do zestawu żadnego odważnika, niczego więc takim zestawem nie zważymy. W pozostałych zestawach jest zawsze przynajmniej jeden odważnik i nie ma zestawów takich samych. A więc możliwości zważenia różnych ciężarów jest dokładnie 15 — zakończył objaśnienia Enkidu. Z kolei Nabonit pokazał wszystkim ciekawym nowy komplet odważników.

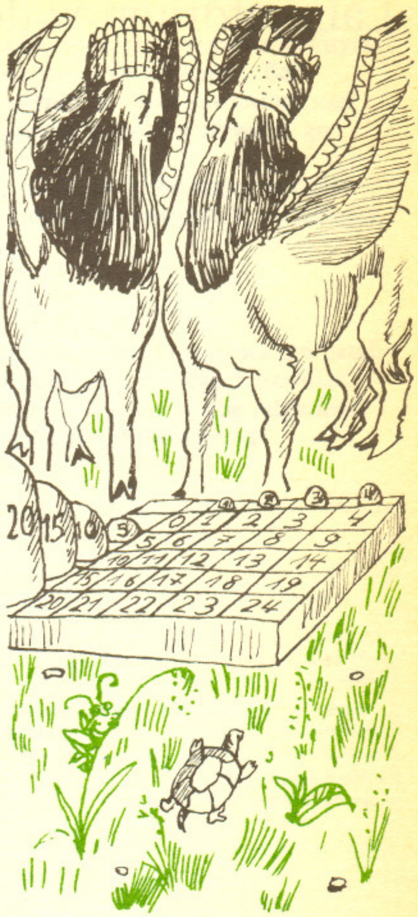
— Jest to najlepszy ze wszystkich możliwych kompletów czterech odważników — powiedział Nabonit. Można nim zważyć każdą ilość towaru o ciężarze od 1 do 15 min! Czy może być lepszy komplet odważników?

Czy domyślacie się, jak wygląda ten nadzwyczajny komplet? Jeśli nie udało się Wam go jeszcze dobrać, a jesteście ciekawi, jakie odważniki dobrali do swojego kompletu nasi przyjaciele, zdradzimy Wam jego tajemnicę. A więc odważniki *A*, *B*, *C*, *D* powinny ważyć kolejno 1, 2, 4 i 8 min (każdy następny dwa razy tyle, co poprzedni). Spróbujcie przy pomocy tego kompletu odważyć 11 min towaru i inne jeszcze ilości, a potem popatrzcie jeszcze raz na „matematyczne drzewko" kupców z Babilonu i sprawdźcie, ile będą ważyły odważniki każdego z zestawów, które otrzymamy idąc po drzewku szesnastoma różnymi drogami. Czy zauważyliście coś ciekawego?

Powróćmy jednak do naszych przyjaciół z Babilonu. Pamiętacie, że Nabonit powiedział: „Czy może być lepszy komplet odważników?" Przekonaliście się chyba, że przy takiej metodzie ważenia, jaką się posługują nasi kupcy, lepszego sposobu nie ma. Ale Nabonit nie wziął pod uwagę, że używając wagi szalkowej można kłaść odważniki na obie szalki. A przy takim sposobie ważenia można dobrać znacznie lepszy komplet od tego, jakim się posługują Nabonit i Enkidu. Odważniki *A*, *B*, *C*, *D* tego znacznie lepszego kompletu powinny ważyć kolejno: 1, 3, 9 i 27 min. Da się nimi zważyć każdą ilość towaru od jednej miny aż do czterdziestu! Na przykład dwadzieścia min można zważyć kładąc na jedną szalkę odważniki: 27 i 3 miny, a na drugą szalkę, wraz z ważonym towarem, odważniki 9 min i 1 minę. Spróbujcie tymi odważnikami odważyć jeszcze inne ilości towaru. Czy do takiego sposobu ważenia umiecie narysować „matematyczne drzewko" podobne do tego, które narysował Enkidu? Spróbujcie! Bądźcie tylko przygotowani na to, że drzewko będzie miało wówczas aż 81 gałęzi, ale tylko czterdzieści z nich przyda się do ważenia (dlaczego?). Pamiętajcie też, że na każdej linii każda gałąź musi rozwidlać się na trzy odnogi. Jedną z nich oznaczcie znakiem minus (będzie to oznaczało, że kładziemy odważnik na szalkę, na której znajduje się towar). Drugą oznaczcie zerem (nie kładziemy odważnika na żadną szalkę) i wreszcie trzecią oznaczcie znakiem plus (kładziemy odważnik na szalkę dla odważników). Innych możliwości już nie ma, a więc i to drzewko będzie wskazywało wszystkie możliwe układy odważników na szalkach.

Można dobierać także inne komplety odważników odpowiednio do różnych sposobów ważenia. Na przykład przy pomocy 18 odważników — dziewięciu odważników „mniejszych" 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 min oraz dziewięciu odważników „większych" 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 min — można zważyć każdą ilość towaru: od 1 do 99 min, i to z zachowaniem warunku, że odważniki kładziemy tylko na jednej szalce, przy czym na szalce znajduje się najwyżej jeden odważnik „mniejszy" i jeden „większy". Czy wiecie, jak tą metodą zważyć 78 min towaru? Proste, prawda?

Jeśli proste, to weźcie teraz 8 następujących odważników: 4 odważniki „mniejsze" 1, 2, 3 i 4 miny oraz 4 odważniki „większe" 5, 10, 15 i 20 min. Jakie ciężary można nimi odważać, zachowując opisane wyżej warunki (na szalce kładziemy jeden odważnik „mniejszy" i jeden odważnik „większy")? Do ważenia tymi odważnikami posłużcie się tabelką, którą narysowaliśmy obok. Pokazuje ona, jak układać z odważników wszystkie możliwe ciężary.



Czy umiecie obmyśleć jeszcze inne podobne komplety odważników? A czy potrafilibyście ułożyć komplet odważników do ważenia przy możliwości umieszczania na szalce najwyżej trzech odważników: jednego „małego", jednego „średniego" i jednego „większego"?

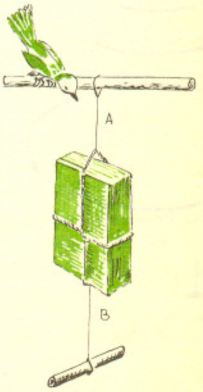
Jeśli zainteresowały Was różne metody ważenia i chcecie wiedzieć o nich coś więcej, zainteresujcie się działem matematyki, który mówi o **niedziesiątkowych systemach pozycyjnych!**

Wszystkiego trzeba się nauczyć, spostrzegania niezwykłych rzeczy także. Chcę Wam pomóc w tej nauce i dlatego proponuję wykonanie dwóch doświadczeń. Wy zaś postarajcie się zauważyć, jaka to cecha, własność materii odgrywa w tych doświadczeniach najważniejszą rolę.

Wyjaśnienie doświadczeń znajdziecie ukryte wewnątrz tego numeru — dobrze poszukajcie. A może sami dojdziecie do rozwiązania?

DOŚWIADCZENIE 1 OPORNY CIĘŻAREK

Są nam potrzebne: kamień lub kulka metalowa, cienka nitka i drewniana rączka, na przykład ołówek. Przydadzą się dwa krzesła oraz kij od szczotki. Ustawmy dwa krzesła i połóżmy na ich oparciach kij od szczotki. Do kija przywiążmy nitkę A, do nitki kamień, do kamienia znów nitkę B, a na końcu nitki rączkę. Zróbcie tak, jak pokazuje rysunek. Pociągajmy teraz za rączkę. Pierwszy raz powoli, zwiększając przyłożoną siłę aż do chwili zerwania nitki. Która nitka ulega zerwaniu: A czy B? (w doświadczeniu, które ja przeprowadziłem, zerwała się nitka A). Drugi raz, oczywiście po ponownym zawieszeniu na nowej nitce, szarpniemy rączką bardzo gwałtownie. Która nitka zerwie się tym razem? (ja zerwałem nitkę B). Czy nikogo nie dziwi wynik doświadczenia? Na odcinek nitki A działa siła ręki i siła, jaką Ziemia przyciąga kamień. Wydawałoby się, że zawsze powinien zerwać się odcinek nitki A. Tak jednak nie jest. Odkrywamy jakiś, na razie tajemniczy, czynnik, który przy gwałtowynym szarpnięciu chroni nitkę A. Czy jest powód do zdziwienia? Moim zdaniem tak, warto się zastanowić.



DOŚWIADCZENIE 2 DZIWNE ZACHOWANIE SIĘ MONETY

Weźcie szklankę, kartkę papieru i monetę 10-złotową. Na szklance kładziemy papier, a na nim, nad środkiem szklanki, monetę. Proszę teraz gwałtownie pociągnąć kartkę. Moneta spadnie do szklanki. Jeżeli operację przeprowadzimy powoli, moneta usunie się razem z kartką i spadnie poza obrębem szklanki. Czy widzicie analogię do poprzedniego doświadczenia? Czy jest w tym coś, co Was dziwi?

«Małą Deltę» opracowali T. Hofmokl, P. Nowicki, D. Ziemińska

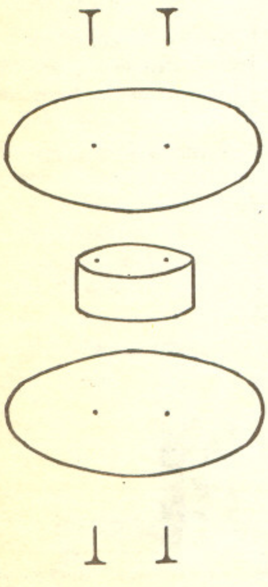
Dr Jan A. Gaj

NIESTRUDZONE WAHADEŁKO ALBO O NIEZBYT REZONANSOWYM REZONANSIE

Proponuję Wam dziś wykonanie urządzenia, które, odpowiednio zademonstrowane, pomoże Wam przekonać najzatwardzialszych oponentów (oczywiście, jeżeli nie czytają «Delty»), że tym razem już całkowicie posiedliście umiejętność skonstruowania *perpetuum mobile*. Jeżeli jesteście w stanie zdobyć tranzystor TG3A, diodę DZG1, mały magnesik i drut nawojowy, możecie zrobić wahadełko, które stale się waha. A jak? Tajemnicą jego ruchu jest oczywiście niezbyt rezonansowy rezonans, czyli

PARAMETRYCZNE POBUDZANIE DRGAŃ

Najlepszą ilustracją tego zjawiska jest rozpędzanie huśtawki przez uginanie nóg. Jak wiecie, trzeba w tym celu uginać nogi w skrajnych położeniach huśtawki, a prostować je w momencie, kiedy huśtawka przelatuje przez położenie równowagi i ma największą prędkość. Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, zmniejszenie się momentu bezwładności (część masy zbliża się do osi obrotu) powoduje zwiększanie się prędkości kątowej, czyli rozpędzanie huśtawki. Jeżeli pomyślicie chwilę, to zauważycie następujące cechy tego sposobu:
1) pobudzanie układu do drgań odbywa się przez okresowe zmiany jednego z parametrów decydujących o okresie drgań własnych układu (moment bezwładności),
2) częstość pobudzania jest dwa razy większa od częstości drgań własnych układu (w ciągu jednego okresu huśtawka dwukrotnie przechodzi przez położenie równowagi i dwukrotnie prostujemy nogi), a nie równa jej, jak przy zwykłym rezonansie,
3) pobudzanie parametryczne może powiększać amplitudę już istniejących drgań, ale nie wywoła drgań układu spoczywającego.
Te trzy cechy są wspólne dla parametrycznego pobudzania dowolnych układów drgających, nie tylko mechanicznych. W układach elektrycznych zjawisko to można na przykład wykorzystać do budowy elementów cyfrowych maszyn matematycznych. My wykorzystamy je do zadziwiania znajomych, konstruując „wieczne wahadełko". Pierwszy etap naszej działalności to zaopatrzenie się w potrzebne

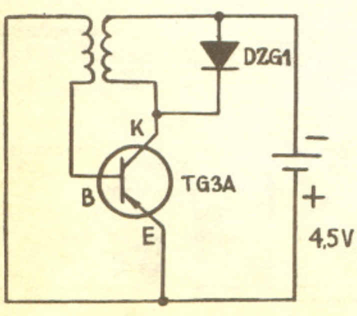


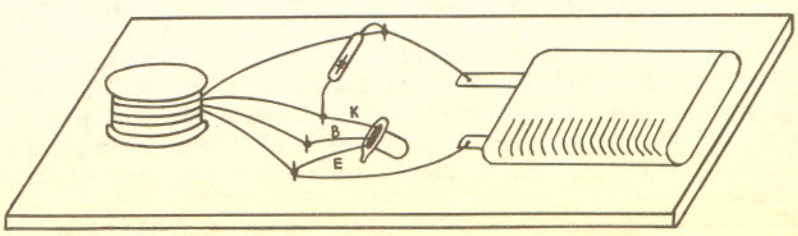
MATERIAŁY

1) Tranzystor TG3A lub inny podobny.
2) Dioda DZG1 — ale może być dowolna typu DZG.
3) Magnesik, najlepiej ferrytowy, o wymiarach np. $2 \times 2 \times 1$ *cm* albo innych tego rzędu (nie może być zbyt mały).
4) Drut nawojowy, np. z zepsutego transformatora dzwonkowego, o średnicy rzędu 0,15–0,30 *mm*.
5) Bateryjka 4,5 *V*.
6) Drobne materiały pomocnicze: nitka, kawałek drewna, tekturka, sklejka, dobry klej (np. Butakol lub stolarski).
Macie już wszystko? Przystępujemy więc do następnego etapu, czyli

ROBIMY WAHADEŁKO

Zaczynamy od szpulki. Możemy ją zrobić z krótkiego kawałka kija od szczotki (około 1,5 *cm*), do którego przyklejamy dwa tekturowe krążki o średnicy około 5 *cm* (zależnie od grubości drutu). Dla pewności możemy przybić je gwoździkami, które po nawinięciu drutu wyjmiemy. Nawijamy dwa uzwojenia po około 1000 zwojów. Całość przymocujemy do kawałka sklejki, w którym zrobimy cztery otworki i wbijemy cztery kawałki grubego drutu miedzianego. Do nich przylutujemy elementy układu zgodnie ze schematem. Całość będzie wyglądała mniej więcej, jak na rysunku.





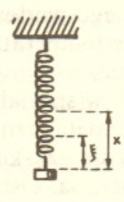
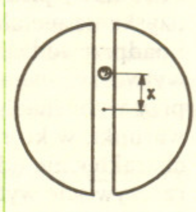
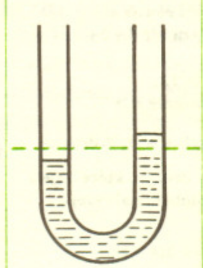
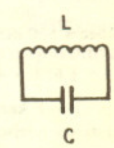
CO NAM WYSZŁO?

Układ elektroniczny, który zbudowaliśmy, nazywa się generatorem samodławnym. Wytwarza on jednorazowy impuls prądu po pobudzeniu go z zewnątrz. Bez pobudzenia prąd przez tranzystor praktycznie nie płynie. A teraz zawiesimy nad cewką generatora magnesik na nitce jednym z biegunów w dół i wprawimy go w ruch wahadłowy.
Poruszający się magnes będzie indukował w cewce napięcie, pobudzając generator samodławny. Impulsy prądu będą przyciągały lub odpychały magnesik, zmieniając efektywną wartość g we wzorze na okres wahadła:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Będzie ono w ten sposób pobudzane parametrycznie i amplituda jego wahań ustali się. Gdyby wahadełko nie działało, należy zmienić końcówki jednego z uzwojeń. Jeżeli przykryjecie całe urządzenie pokrywką tekturową, trudno będzie odgadnąć niewtajemniczonym, co w nim siedzi i popędza wahadełko. Powodzenia!
I koniecznie napiszcie, jak Wam się udało.

Rozwiązanie zadań F6.
Rozwiążemy zadania jednocześnie przedstawiając kolejne kroki rozumowania w tabelce.

	Zadanie I	Zadanie II	Zadanie III	Zadanie IV
Oznaczenia	x — rozciągnięcie sprężyny	G — stała grawitacyjna ϱ — gęstość Ziemi M_X — masa kuli o promieniu x	S — pole powierzchni przekroju rurki ϱ — gęstość cieczy	V_C — spadek potencjału na kondensatorze $\mathcal{E}$ — siła elektromotoryczna samoindukcji I — natężenie prądu w obwodzie
Co jest obiektem poruszającym się	ciężarek o masie m	ciało o masie m	słup cieczy	elektrony
Szkic sytuacji				
położenie równowagi	$\xi = 0$, gdy równowaga sił przyciągania ziemskiego i sprężystości sprężyny $x_0 = \frac{mg}{k}$	środek Ziemi	jednakowy poziom cieczy w obu ramionach	Ładunek Q na okładkach kondensatora $= 0$
miara wychylenia z położenia równowagi	ξ — odległość ciężarka od punktu równowagi sił	odległość od środka Ziemi	odległość poziomu cieczy od położenia równowagi	ładunek Q na okładkach kondensatora
czynnik powodujący powrót do położenia równowagi	siła $F = mg - kx$	siła $F =$ $= -G \frac{m \cdot M_X}{x^2} \frac{x}{\lvert x \rvert} =$ $= -\left(\frac{4}{3} \pi G m \varrho\right) \cdot x$	siła $F = -2x \cdot S \cdot \varrho \cdot g$	V_C — potencjał na okładkach kondensatora $V_C = Q/C$
obliczenie przyspieszenia powrotu do położenia równowagi	$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ $x = mg/k + \xi$ $\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k}{m}\xi$	$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ $\frac{d^2x}{dt^2} =$ $= -\left(\frac{4}{3} \pi G \varrho\right) \cdot x$	$F = m \frac{d^2x}{dt^2}$ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2g}{l} \cdot x$	$\mathcal{E} = V_C$ $\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} =$ $= -L \frac{d^2Q}{dt^2}$ $\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q$

Część II rozwiązania na str. 5

Rozwiązania — Gry
Zad. 1. Rzucamy monetę. Jeśli wypadnie orzeł — wybieramy strategię 1. Jeśli wypadnie reszka — rzucamy kostkę i o ile wypadnie szóstka, wybieramy strategię 1, a w pozostałych przypadkach strategię 2.
Zad. 2. Teoria proponuje stosować stale strategię 2, która pozwala oczekiwać wygranej średnio $\frac{1}{3}$ zapałki, co jest rozwiązaniem na krótką metę, przeciwnik bowiem z pewnością to zauważy i zacznie grać inaczej.
Zad. 3. a) Dla obu graczy optymalne są strategie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, wartość gry wynosi $\frac{1}{2}$. b) Gra ma parę strategii czystych w równowadze — są to strategie (0,1) dla pierwszego i (1,0) dla drugiego; wartość gry wynosi 2. c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ dla pierwszego i $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ dla drugiego; wartość gry: $\frac{5}{2}$.

Ciekawe—i nie tylko

We współczesnej fizyce widzimy wyraźnie dwa blisko ze sobą powiązane nurty. Pierwszy z nich można umownie nazwać „wdrożeniowym", a drugi „naukowo-poznawczym". W obrębie pierwszego nurtu koncentrują się prace nad wykorzystaniem już istniejących, sprawdzonych i zaakceptowanych odkryć fizycznych. Drugi nurt to żmudne i kosztowne badania mające na celu rozszerzenie wiedzy o otaczającym nas świecie.

Ciekawym przykładem wysiłków zmierzających do wykorzystania dobrze już znanych praw fizyki są prace nad skonstruowaniem superszybkiego pociągu poruszającego się na „poduszce" magnetycznej, opisane w «Scientific American», tom XXII, nr 4. Artykuł ten stanowi znakomitą ilustrację praw elektrodynamiki i wykorzystania sił elektromagnetycznych.

Jeśli chodzi o drugi nurt, to we wspomnianym numerze «Scientific American» znaleźć można także dosyć trudny, ale za to pozwalający na wejrzenie do świata cząstek elementarnych artykuł o zderzeniach elektronów i pozytonów przy wysokich energiach uzyskiwanych w wiązkach przeciwbieżnych. Rozpatrywane w artykule zderzenia elektron–pozyton prowadzą do ich anihilacji i, przy dostatecznie wysokich energiach, do powstania par cząstek o masie spoczynkowej wieleset razy większej od masy elektronu.

Typowym przykładem ścisłej łączności obu wspomnianych wyżej nurtów mogą być poszukiwania uczonych w dziedzinie nadprzewodnictwa. Jest to dziedzina pełna jeszcze znaków zapytania, ale wiadomo już obecnie, że pełne poznanie tajemnic nadprzewodnictwa mogłoby mieć olbrzymie znaczenie dla energetyki przyszłości — energetyki bez strat wywoływanych oporami elektrycznymi zwykłych przewodników. W dziedzinie tej mamy do zanotowania dwa doniesienia. Pierwsze z nich («Physics Today», tom XXVI, nr 10) dotyczy rekordowo wysokiej temperatury, w której udało się otrzymać nadprzewodnictwo; temperatura ta wynosi 23,2 *K*. Materiałem, który w tak „wysokiej" temperaturze staje się nadprzewodnikiem, jest Nb_3Ge. Rzecz jest o tyle ważna, że temperatura ta znajduje się powyżej temperatury wrzenia ciekłego wodoru, co pozwala na prowadzenie badań nad tym materiałem bez konieczności używania ciekłego helu, który jest znacznie trudniejszy do uzyskania i droższy od ciekłego wodoru. Prawdziwy przełom w nadprzewodnictwie mogłoby jednak przynieść dopiero uzyskanie metalicznego wodoru. Substancja ta bowiem miałaby być metastabilna i nadprzewodząca w temperaturze pokojowej (293 *K*). Jak do tej pory usiłowano wytworzyć metaliczny wodór przy użyciu bardzo wysokich ciśnień powstających przy wybuchach lub w specjalnych prasach. W eksperymentach tych uzyskano warunki, w których metaliczny wodór mógłby się wytworzyć, ale ze względu na ich charakter nie udało się uzyskać całkowitej pewności, że substancja ta została rzeczywiście wytworzona. Ostatnio «New Scientist» (nr 873) donosi o przeprowadzonych w Lyonie próbach nad uzyskaniem struktury metalicznego wodoru we fluorku litu bombardowanego protonami o energii 2 *MeV*. Substancja uzyskana tą drogą wykazuje zmiany strukturalne, które odpowiadają niejako wbudowaniu w strukturę kryształu LiF struktury odpowiadającej metalicznemu wodorowi.

Rozwiązanie zadania M16.

Niech n będzie liczbą drużyn uczestniczących w rozgrywkach. Każda drużyna rozegrała $n-1$ spotkań, a więc ogółem rozegrano $\frac{1}{2}n(n-1) = \binom{n}{2}$ spotkań (dzielimy przez 2, gdyż spotkanie drużyn A i B liczone było zarówno jako rozegrane przez A, jak i przez B). Ogólna liczba punktów, które zdobyły wszystkie drużyny, jest więc równa $n(n-1)$ i jest oczywiście nie mniejsza niż $7+5+3 = 15$:

$$n(n-1) \geqslant 15,$$

skąd wobec $n > 0$ otrzymujemy $n \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{61}\right) > 4$, czyli $n \geqslant 5$. Z drugiej strony, ponieważ każda z drużyn, które zajęły trzecie i dalsze miejsca, zdobyła najwyżej 3 punkty, więc

$$n(n-1) \leqslant 7+5+3(n-2),$$

skąd $n^2-4n-6 \leqslant 0$ i $n \leqslant 2+\sqrt{10} < 6$. Musi więc być $n = 5$ i liczba zdobytych przez czwartą i piątą drużynę punktów wynosi $5\cdot 4-(7+5+3) = 20-15 = 5$. Drużyna czwarta zdobyła więc 3 punkty (więcej nie mogła, gdyż tyle ma trzecia), piąta zaś 2.

«Mała Delta» — rozwiązania

Mówisz czasami: „och, jaki jestem bezwładny!" Każdy rozumie, że ciężko Ci się ruszyć z miejsca i zapewne najchętniej wylegiwałbyś się na tapczanie. Możesz być bardziej lub mniej bezwładny — zależy to od Twego lenistwa, zmęczenia, a nawet od wygodnego tapczanu. Kamień nie może sam się ruszać, a jednak przypisujemy mu cechę, którą nazywamy masą bezwładną, w mowie zaś potocznej — masą. Jeżeli kamień ze stanu spoczynku chcemy doprowadzić do stanu, w którym porusza się z prędkością v (po prostu leci), i zrobić to w czasie t, musimy podziałać nań siłą (rzucić nim). Wielkość tej siły f zależy od masy bezwładnej m, prędkości v i czasu t. Im większa prędkość i masa i im mniejszy czas, tym większa siła.

Ci, co poznali zasady dynamiki Newtona, wiedzą, że jest to szczególny przypadek drugiej zasady. Możemy teraz zrozumieć wynik przeprowadzonych doświadczeń: Przy powolnym ciągnięciu za rączkę, działa na nitkę A siła równa sumie siły ręki i siły, jaką Ziemia przyciąga kamień. Zerwie się nitka A, gdyż przyłożona do niej siła jest większa niż przyłożona do nitki B. Jeżeli szarpiemy, to znaczy, że chcemy poruszyć kamień w bardzo krótkim czasie t i nadać mu prędkość v (prędkość naszej ręki). Aby kamień nagle przyspieszył, musimy użyć siły f, którą łatwo obliczyć. Siła ta jest większa niż wytrzymałość nitki, która urywa się, ale przed kamieniem, a więc na odcinku B. Można powiedzieć, że kamień opiera się ruszeniu go z miejsca. Siłę oporu nazywamy siłą bezwładności.

$$f = m\frac{v}{t}$$

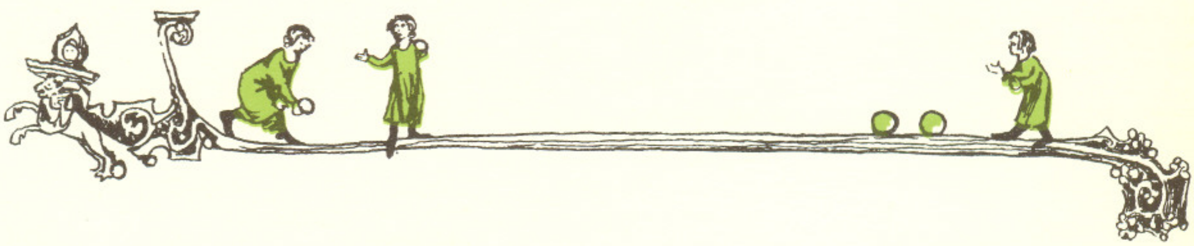
Sami już pewnie zrozumieliście wynik doświadczenia drugiego. Rolę nitki odgrywają siły tarcia monety o papier. Przy szarpnięciu gwałtownym siły te są mniejsze niż siła bezwładności i moneta nie przesuwa się z kartką, lecz spada do szklanki. Napiszcie do mnie, czy podobnie wytłumaczyliście sobie te doświadczenia. Wśród autorów ciekawszych wypowiedzi rozlosujemy nagrody książkowe.

Rozstrzygnięcie konkursu z numeru kwietniowego

Spośród zamieszczonych w numerze czwartym artykułów dwa były wyłącznie żartem. Pierwszy, to *Aktualności podstaw matematyki* — dotychczas nikt nie opracował jeszcze podstaw logiki zerowartościowej. Drugi, to artykuł opatrzony tytułem *Kwarki i monopole magnetyczne odkryte* — wprawdzie teoria nie przeczy istnieniu takich cząstek, ale ich jeszcze nie odkryto.
Chwila uwagi należy się jednak sprawozdaniu ze zjazdu SCFRZR ze względu na jego niecodzienną formę. Oto, co na ten temat pisze autor sprawozdania:
Oczywiście personifikacja funkcji jest fikcją. Nie było też żadnego zjazdu poświęconego palącym zagadnieniom teorii różniczkowalności funkcji. Natomiast treść matematyczna artykułu jest całkowicie poprawna. Dowody nieróżniczkowalności funkcji van der Waerdena i Weierstrassa można znaleźć w książkach: R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste I*, Warszawa 1958, s. 419–421, oraz E. Goursat, *Kurs analizy matematycznej*, Warszawa 1914, s. 77–78.
Nikt nie rozpisywał obecnie konkursu na taką reformę teorii różniczkowalności, by każda ciągła funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej miała pochodne wszystkich rzędów. Reforma taka bowiem została przeprowadzona w drugim ćwierćwieczu obecnego stulecia, kiedy to powstała teoria dystrybucji. Matematyczne pojęcie dystrybucji (określonej na pewnym przedziale P liczb rzeczywistych) nie ma nic wspólnego ze znaczeniem terminu „dystrybucja" w języku potocznym. Dystrybucje na przedziale P są przedmiotami matematycznymi tak skonstruowanymi, że w zbiorze dystrybucji można wykonywać różniczkowanie bez żadnych ograniczeń lub dodatkowych założeń. Dokładniej, w zbiorze dystrybucji definiuje się różniczkowanie przyporządkowujące każdej dystrybucji f jej pochodną f' będącą dystrybucją (określoną na tym samym przedziale P). Każda ciągła funkcja rzeczywista f jest dystrybucją, a więc ma dobrze określoną pochodną f', która jest dystrybucją; na ogół nie jest funkcją. Jeśli jednak zwykła pochodna funkcji f jest funkcją ciągłą, to pochodna zwykła jest zarazem pochodną dystrybucyjną tej funkcji. Zatem różniczkowanie dystrybucyjne jest uogólnieniem różniczkowania zwykłego w dziedzinie funkcji o ciągłej pochodnej zwykłej.
Okazuje się, że dystrybucje obejmują również wiele nieciągłych funkcji rzeczywistych, na przykład funkcję Heaviside'a H. Pochodna dystrybucyjna H' tej funkcji jest najprostszym przykładem dystrybucji, która nie jest ani funkcją ciągłą, ani funkcją nieciągłą. Dystrybucja H' nosi nazwę „dystrybucji delta Diraca". Innymi przykładami dystrybucji nie będącymi funkcjami są pochodne dystrybucyjne funkcji van der Waerdena, funkcji Weierstrassa i funkcji Cantora.
Na dystrybucjach można wykonywać wiele działań jak na funkcjach. Na przykład dystrybucje można dodawać do siebie, odejmować, mnożyć przez liczby rzeczywiste i mnożyć przez te funkcje rzeczywiste, które posiadają pochodne wszystkich rzędów. Rachunki na dystrybucjach przebiegają przy tym tak jak na funkcjach; fakt, że różniczkowanie jest stale wykonalne, że każda zatem dystrybucja ma pochodne wszystkich rzędów, jest dużym udogodnieniem. Niestety, dystrybucje mają też wady: nie można w sensowny sposób zdefiniować pojęcia iloczynu fg dwu dowolnych dystrybucji f, g (określonych na tym samym przedziale P).

R. S.

Listę nagrodzonych opublikujemy w numerze następnym.



Konkurs!

Na czwartej stronie okładki zamieszczona jest plansza do gry „Jasyr". Można ją również znaleźć w niedawno wydanej książce Zdzisława Nowaka p.t. *Mu-torere, Do-guti i inne*, zawierającej także opisy 49 innych gier planszowych wraz z planszami. Niektóre z tych gier są skomplikowane i trudne, niektóre zaś bardzo proste. Zadanie polega na odnalezieniu gier rozstrzygalnych, to znaczy takich, w których można wskazać niezawodną receptę na wygranie lub wykazać, że przy uważnej grze przeciwników zawsze osiągany jest remis. Oczywiście odpowiedź musi być poparta dowodem. Nie jest konieczne zaopatrywanie się w tę książkę, o ile mamy do niej dostęp, gdyż ze zrozumiałych względów zajmiemy się tylko grami najprostszymi, a z tymi łatwo się zapoznać w ciągu doprawdy kilku minut.
Wśród Czytelników, którzy wskażą najwięcej takich gier, rozlosujemy interesujące książki.

Przy okazji: Jedną z opisanych gier, bardzo ciekawą i trudną, jest GO. Warto się nią zainteresować, zwłaszcza że ostatnio ukazała się w sprzedaży (istotne: potrzeba aż 360 pionków!). Nawiasem mówiąc, instrukcja dołączona do niej spotkała się krytycznymi uwagami, wytykającymi błędy merytoryczne. Jak łatwo sprawdzić, instrukcja ta została zaczerpnięta niemal dosłownie ze wspomnianej książki Z. Nowaka. Większość błędów — również.

J.B.