

Konkurs!

Które z zamieszczonych artykułów są wyłącznie żartem?

Odpowiedzi na kartkach pocztowych prosimy nadsyłać do dnia 15 maja 1974 r. (decyduje data stempla pocztowego) na adres Redakcji.

Wśród Czytelników, którzy nadesłali prawidłowe odpowiedzi, rozlosujemy nagrody książkowe.

SPIS TREŚCI

Co to jest życie? <i>Dr Magdalena Fikus</i>	str. 1
Ciekawe — i nie tylko	str. 3
Sztuka wygrywania <i>Dr Tadeusz B. Iwiński</i>	str. 4
Zadania	str. 5
Kwarki i monopole magnetyczne odkryte!	str. 6
Tylko linijką	str. 7
«Delta» z wizytą w Katedrze Fizyki i Elektroniki Ciała Stałego WAT	str. 8
Algorytmy <i>Dr Andrzej Skowron</i>	str. 10
Laboratorium w domu Czy Ziemia może podskoczyć albo co się rusza w zegarku? <i>Dr Jan Gaj</i>	str. 12
Zjazd SCFRZR	str. 14
Aktualności podstaw matematyki	str. 16
Złośliwy czworościan	str. 17
Na okładce: struktura białka	

W następnym numerze:

25 lat olimpiady matematycznej
Dlaczego Niemcy nie zdążyli wynaleźć bomby atomowej?

„Delta”
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego
wydawany przy poparciu Polskiej Akademii Nauk oraz Ministerstwa Oświaty i Wychowania
Komitet Redakcyjny
prof. dr G. Białkowski
doc. dr A. Blikle
prof. dr A. Hryniewicz
doc. dr B. Iwaszkiewicz
prof. dr J. Janik
doc. dr J. Jatzak
prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący
prof. dr Z. Krygowska
prof. dr K. Leibler
mgr W. Łuczniak
prof. dr A. Mąkowski
prof. dr A. Pełczyński
prof. dr Arkadiusz Piekara — wiceprzewodniczący
prof. dr J. Rayski
prof. dr W. Rubinowicz

prof. dr A. Schinzel
prof. dr Z. Semadeni
prof. dr M. Subotowicz
dr A. Wakulicz
doc. dr W. Zawadowski
Redaguje Kolegium w składzie:
mgr J. Bednarczuk — sekr. red.
T. Deskur — red. techn.
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nac.
dr M. Kordos — red. nac.
dr Z. Płochocki
opracowanie graficzne
art. graf. K. Dobrowolski
Adres Redakcji
ul. Śniadeckich 8,
00-656 Warszawa, PTM
Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark.
wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 147/74 W-121

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch, w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenie właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedż numerów bieżących i uprzednich

Institucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTE”:

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN.
Sprzedż gotówką i wysyłką, pojedynczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.

Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,—

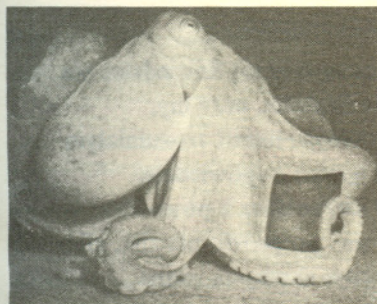
nr indeksu 35723

Dr Magdalena FIKUS



Kura (leghorn)

Foto V. J. Staněk



Ośmiornica zwyczajna

Foto V. J. Staněk



Bicogon egipski

Foto V. J. Staněk

Wśród pytań, które zawsze absorbowały ludzkość, na plan pierwszy wybija się: co to jest życie? Zadają sobie to pytanie ludzie młodzi, zadają lekarze, filozofowie, fizycy, biolodzy. Każdy odpowiada na to pytanie nieco inaczej, po swojemu.

Biolodzy, jako ci, którzy zajmują się studiowaniem istot żywych, wydają się szczególnie predestynowani do szukania odpowiedzi. Ów znak zapytania może jednocześnie stanowić sens, podsumowanie ich badań. Zaczęli od opisanie świata ożywionego: klasyfikowali wszystko, co wydawało im się żywe. Dopiero, kiedy katalog był (jak sądzili) gotowy, zajęli się mechanizmami działającymi w żywym organizmie, najpierw z punktu widzenia całego organizmu, a potem szczegółów. I tu właśnie spotkali się z fizykami. Znamienne zresztą, że pytanie o definicję życia trapi przede wszystkim fizyków. Wybitny atomista, Erwin Schrödinger, pisze w swej książce *What is Life?*: „Wszystko, czego dowiedzieliśmy się o budowie materii żywej, powinno nas przygotować do stwierdzenia, że dział ona w sposób nie dający się sprowadzić do zwykłych praw fizycznych [...] Krótko mówiąc, jesteśmy świadkami wydarzenia, że istniejący ład okazuje zdolność samodzielnego utrzymania się i wywoływania wydarzeń uporządkowanych [...] Jednak z punktu widzenia fizyka ten stan rzeczy w żadnym wypadku nie może być uznany za nadający się do przyjęcia; wręcz przeciwnie, jest on nadzwyczaj pasjonujący, bo jest bez precedensu”.

Książka wywołała burzę. Pisze wybitny filozof, psycholog i pedagog Jean Piaget: „W dniu, w którym fizyka wytłumaczy struktury właściwe życiu, asymilacja między tą nauką i biologią nie nastąpi jednostronnie, lecz będzie wzajemna [...] Fizyko-chemiczne wytłumaczenie życia doprowadzi do zbiologizowania fizyko-chemii, pozornie materializując czynnik vitalny”. „Trzeba, aby fizycy zdali sobie sprawę” — zauważa biolog E. Guyenot — „że my biologowie, którzy czyniliśmy rozpaczliwe wysiłki, aby przełożyć życie na formuły fizyko-chemiczne, napotkaliśmy rzecz nie dającą się rozwiązać, i to jest właśnie życie [...]”.

Nie sposób uznać dziś, że droga fizyków do biologii jest prosta. Właściwie w trakcie rozwiązywania każdego problemu okazuje się, że istnieją luki, które, gdyby je chciał poszufladkować i opatrzyć etykietkami, sprowadzają się do braków w teoretycznej chemii, biochemii, a nawet w jeszcze prostszej pozornie dziedzinie, jaką jest zbieranie wystarczającej sumy doświadczalnych danych biologicznych. Aby cokolwiek stwierdzić, trzeba się cofać od układów żywych do tworzonych w laboratoriach modeli, uproszczonych systemów, przypominających tylko naturalne. Ludzie nauczyli się już zadowolająco modelować w doświadczeniu niezwykle skomplikowane i bardzo różnorodne zjawiska — takie jak ewolucję aparatu genetycznego komórek, przekazywanie pobudzenia nerwowego, procesy nowotworowe, syntezę białek i kwasów nukleinowych, energetyczne cykle i łańcuchy przenoszenia elektronów i energii, dziedziczne zmiany z pokolenia na pokolenie (czyli mutacje); nauczyli się budować sztuczne błony, przypominające błony biologiczne, hodować komórki organizmów żywych poza ustrojem, rozszyfrowywać język genetyczny, którym zapisane są wszystkie cechy każdego organizmu żywego, nauczyli się kopiować w probówce niektóre jego słowa, przenosić niektóre z tych słów z jednego organizmu do drugiego. Trwa proces przyglądania się życiu, rozpoczęty kiedyś przez chemików i lekarzy, najpierw podglądania, potem prób naśladowania (tak powstała właśnie biochemia), ale osiągnięcie celu końcowego jest jeszcze odległe. Biochemia bowiem, wyjaśniając w wielu punktach, co się dzieje, nie umiała, nie mogła albo (lepiej można powiedzieć) nie stawiała sobie takiego celu, aby odpowiedzieć na pytanie, **jak** to się dzieje. W tym **jak** zainteresowani są przede



Tamandua

Foto V. J. Staněk

wszystkim fizycy, i tu znajdujemy się dopiero na samym początku drogi. Wynika to między innymi z ograniczeń metodologicznych, z tego, że nie ma jeszcze na przykład maszyn „obliczających” cząsteczki, których masa cząsteczkowa jest równa i większa od tysiąca — a przecież większość cząsteczek biologicznie ważnych ma ciężary obliczane w setkach tysięcy i milionach *daltonów*.

Jeden z wybitnych współczesnych uczonych, specjalista z dziedziny syntetycznych polimerów, profesor Morawetz, powiedział w zeszłym roku na międzynarodowym sympozjum w Pradze, iż osobiście nie wierzy, aby ludzie zdolni byli kiedykolwiek zrozumieć zasady rządzące tworzeniem się trójwymiarowej struktury białka, i choć ogólnie przyjętym dogmatem jest myśl, że kolejność ułożenia budujących białko podjednostek, aminokwasów, determinuje strukturę przestrzenną łańcucha, to jednak nie wierzy on również abyśmy, nawet w dalekiej przyszłości, mogli przewidzieć strukturę, która z zadanej sekwencji aminokwasów wynika. Sala podzieliła się zaraz na dwa obozy...

Tak więc i fizycy, i biolodzy chcieliby dowiedzieć się, lub żeby im to wytłumaczono, **jak** to jest możliwe, że powstały i utrzymały swą egzystencję twory, które nazywamy żywymi. Nieprawdopodobne z punktu widzenia praw fizyki, uporządkowane i celowe układy, które bez otoczenia istnieć nie mogą. Ale porozumieć się ludziom, mimo iż są zaprzątnięci tą samą kwestią, jest niesłychanie trudno: mówią bowiem nieco innymi językami. Fizycy przyzwyczaili się do sformalizowanego języka matematyki, którego z kolei nie rozumieją biolodzy. I nie ma jeszcze na dobrą sprawę biofizyki jako nauki: fizyki w biologii, biologii w fizyce. Są tylko zespoły, ludzie, którzy próbują pracować razem, przymierzyć się do czekających zadań.

Można sobie wyobrazić następujący dialog fizyka z biologiem.

Fizyk: Stoimy naprzeciw siebie — wy biologowie, pragnący się dowiedzieć nie tylko **co**, lecz również **dlaczego?**, i pytający o to nas fizyków, oraz my, którzy chcielibyśmy usłyszeć to pytanie zadane w znanym nam i zrozumiałym języku matematyki, aby móc na nie w tym samym języku odpowiedzieć. Ale w większości przypadków jest to wciąż jeszcze niemożliwe z powodów trywialnych, choćby takich, że tego języka wielu z was po prostu nie zna, albo z przyczyn obiektywnych, gdy pytanie jest dla nas zbyt skomplikowane...

Biolog: A może dlatego, że musiałaby to być rozmowa, nie monolog, dyskusja interdyscyplinarna między zespołami dysponującymi techniką, na jaką mogą sobie pozwolić jedynie najbogatsi?

Fizyk: Wspomniałeś o technice towarzyszącej naszej nowej nauce. To bardzo ważne. Niektórzy utożsamiają nawet ową technikę z pojęciem „biofizyki”. My fizycy daliśmy wam przecież ultrawirówki, które pozwalają na osiągnięcie przyspieszeń równych półmilionowej wielokrotności przyciągania ziemskiego, mikroskopy świetlne i elektronowe, dzięki którym zobaczyliście wirusy, które genialny biolog Pasteur „przewidział”, ale istnienia których nie zdołał udowodnić, więcej, zobaczyliście substancję dziedziczenia, kwasy nukleinowe — już nie organizmy żywe, a cząsteczki...

Biolog: To prawda. Ale, aby móc z nich w pełni korzystać, musieliśmy cofnąć się od układów żywych do modeli tworzonych w laboratoriach, do uproszczonych systemów przypominających naturalne. Choć i na tej drodze zrobiliśmy wiele. To my dowiedliśmy, że białko krwi, hemoglobina dwu różnych ludzi może różnić się tylko jednym aminokwasem na 300 istniejących w łańcuchu, a jeden z tych ludzi jest nieuleczalnie chory. Tylko jeden aminokwas, a zmiana śmiertelna...

Ten dialog nie ma końca. On trwa. Uczestniczą w nim obie strony: fizycy i biolodzy. Coraz częściej także dialog ten zamienia się we wspólną pracę, wspólne roztrząsanie zagadnień, które wszystkie prowadzą do odpowiedzi na pytanie zawarte w tytule: co to jest życie?



Krab potamon

Foto V. J. Staněk



Koza domowa

Foto V. J. Staněk

Ciekawe — i nie tylko

Kiedy w Anglii ukazała się, klasyczna już dziś, książeczka dla młodzieży *Alicja w krainie czarów*, zachwycona nią królowa angielska poprosiła o dostarczenie jej innych utworów autora tej powieści. Ku swemu wielkiemu zdumieniu otrzymała rozprawę z zakresu matematyki wyższej. Lewis Carrol bowiem, który tę książkę napisał, był wykładowcą matematyki na uniwersytecie w Oxfordzie i zawodowo zajmował się tą dziedziną, *Alicję* zaś napisał w chwilach wolnych od pracy naukowej, po prostu dla rozrywki.

W jednym ze swych wykładów słynny matematyk, Dawid Hilbert, tak zdefiniował pojęcie punktu widzenia: Przed każdym czwójką rozciąga się określony horyzont. Niekiedy jednak, z różnych przyczyn, ulega on zacieśnieniu, staje się tak niezmiernie wąski, że utożsamia się z punktem. I wtedy człowiek mówi „To jest mój punkt widzenia”.

Edwin Herbert Hall odkrył w 1879 r. zjawisko, które nazwano zjawiskiem jego imienia. Odkrycia tego dokonał będąc jeszcze studentem i mając 24 lata. Było to dla pewnych kwestii zjawisko bardzo ważne, toteż bardzo szybko trafiło do podręczników fizyki. Już jako trzydziestoletni naukowiec Hall został zaproszony na zjazd fizyków. Przy wzajemnym przedstawianiu się, kilkunastu uczestników zjazdu, słysząc nazwisko odkrywcy tego ważnego zjawiska, stawiało wciąż młodemu fizykowi to samo pytanie: Czy pan nie jest przypadkiem krewnym tego starego Halla, który odkrył zjawisko Halla? Za każdym razem uczony odpowiadał z niezmienną powagą: To ja właśnie jestem tym starym Hallem.

Słynny radziecki matematyk, profesor Mienszow, kiedy na seminarium usłyszał jakiś ciekawy i oryginalny fragment dowodu, przerywał referentowi i mówił: „Proszę poczekać i pozwolić mi to przeżyć”.

Do znanego profesora M. przyszło kiedyś dwóch doktorów. Chcieli, aby rozstrzygnął on spór. Otóż jeden twierdził, że udowodnił pewne twierdzenie, drugi — że ma na nie kontrprzykład. „Tak, to panowie udowodnili wszystko”, stwierdził profesor po wysłuchaniu racji obu doktorów.

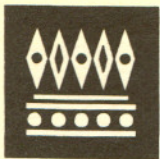
Regularne czytanie periodyków popularnonaukowych oprócz wielu innych oczywistych zalet ma także i tę, że pozwala śledzić proces narodzin odkryć naukowych.

Zazwyczaj na początku pojawia się doniesienie o odkryciu nowego zjawiska fizycznego lub o powstaniu nowej teorii. Potem do ataku ruszają rzesze uczonych na całym świecie, aby sprawdzić wartość doniesienia. Pojawiają się nowe fakty, rozpoczyna się dyskusja. Opinie formułowane są zazwyczaj w tonie pozbawionym emocji, ale nikt nie wątpi, że w laboratoriach wre wyężona praca. Na koniec odkrycie albo zostaje uznane i włączone do ogólnego zasobu wiedzy ludzkiej, albo odrzucone.

Ostatnio mieliśmy kilka przykładów różnych stadiów przebiegu tego procesu. Tak więc pod koniec ubiegłego roku pojawiło się kilka doniesień świadczących o definitywnym końcu hipotezy o istnieniu niezwyklej odmiany alotropowej wody. Woda taka, o cząsteczkach ułożonych podobnie jak w polimerach, miała mieć wysoki ciężar właściwy, duży współczynnik załamania światła, niższą niż zwykła woda temperaturę krzepnięcia i znacznie wyższą temperaturę wrzenia. Z początku uczeni z wielu laboratoriów na świecie uzyskali nawet drobne ilości substancji o własnościach zbliżonych do przewidywanych przez teorię dla wody anomalnej. Jednak późniejsze, dokładniejsze badania tej substancji wykazały, że prócz wody zawiera ona mikroskopijne ilości zanieczyszczeń pochodzących z naczyń laboratoryjnych (krzem, kwarc, sól, bor) lub z powietrza (związki organiczne); te właśnie zanieczyszczenia nadają jej niezwykle właściwości. Obszerniej piszą o tym: «New Scientist» (Vol. 59, No. 859) i «Physics Today» (Vol. 26, No. 10).

O ile los anomalnej wody jest już chyba przesądzony, to w dziedzinie fal grawitacyjnych dyskusja trwa nadal, choć ostatnie doniesienia raczej nie potwierdzają ich istnienia. Doniesienia te dotyczą eksperymentów wykonanych w laboratoriach Bella i firmy komputerowej IBM. Oba zespoły badaczy używały pojedynczych anten typu stosowanego przez pioniera tej dziedziny — J. Webera. W pierwszym wypadku anteną jest blok glinu o masie ok. 120 kg, a w drugim o masie 3200 kg. W jednym i drugim aparatura nie zarejestrowała efektów, które można by uznać za wywołane przez fale grawitacyjne. Dyskusja trwa jednak nadal, ponieważ zmiana wymiarów anteny pod wpływem fal grawitacyjnych jest według przewidywań teoretycznych porównywalna z przypadkowymi zmianami wywołanymi przez ruch termiczny atomów, z których jest zbudowana. Techniki pomiarowe stosowane w tej dziedzinie są niezmiernie precyzyjne, ale ciągle jeszcze nie ma definitywnej odpowiedzi, czy przedmiotem obserwacji Webera są fale grawitacyjne, czy jakieś bliżej nie określone efekty fizyczne, czy szumy aparatury pomiarowej («Physics Today», Vol. 26, No. 10).

Tymczasem pojawił się już nowy temat do dyskusji dla fizyków — nowa cząstka elementarna. Otóż uczeni z Uniwersytetu w Leeds, w Anglii, zajmujący się badaniem promieniowania kosmicznego zarejestrowali nieoczekiwany rozkład intensywności tego promieniowania w zakresie energii 10^{12} – 10^{13} eV. Na początku podejrzewali, że zjawisko to jest wywołane jakąś usterką aparatury. W takich wypadkach obowiązuje bowiem duża ostrożność w interpretacji, ponieważ zdarzyło się już, że wskazania przyrządów, mające być dowodem istnienia nowej cząstki, były wynikiem wadliwego działania fotopowielacza. Jednak ostatnio, po czterech latach testów, badacze z Leeds zdecydowali się wysunąć hipotezę, że wykryty przez nich efekt powoduje nowa cząstka elementarna, prawdopodobnie o masie 40 do 70 razy większej od masy protonu, czasie życia $2 \cdot 10^{-7}$ sekundy i przekroju czynnym na oddziaływanie ze składowymi atmosfery ziemskiej 10 razy mniejszym niż analogiczny przekrój dla protonu. Obecnie kilka niezależnych grup badaczy, którzy dysponują odpowiednią aparaturą, rozpoczęło eksperymenty mające na celu sprawdzenie tej hipotezy. Również zespół z Leeds rozpoczął budowę nowej aparatury, która ma służyć do dokładniejszego zbadania własności nowej, na razie jeszcze hipotetycznej cząstki (K. A.



dr Tadeusz B. IWIŃSKI

Działkowicz **D** uprawia swą działkę nie tylko dla samej przyjemności obcowania z przyrodą. Liczy on również na pewne dochody ze sprzedaży tego, co ziemia mu urodzi. Postanowił obsadzić działkę tulipanami lub truskawkami. Wie on (mniejsza o to, skąd), że jeśli wiosenne pogody sprzyjają obfitości truskawek, to tulipany wyrastają marnie; jeśli natomiast tulipany rozwijają się nad podziw pięknie, to truskawki zupełnie się nie udają. Ani we wróżby, ani w prognozy meteorologiczne **D** nie wierzy, nie jest więc w stanie przewidzieć, jakie będą wiosenne pogody. Wyliczył sobie, że jeśli wiosna okaże się truskawkowa, to na truskawkach zarobi na czysto 3 tys. złotych, natomiast ze sprzedaży tulipanów uzyska zaledwie zwrot kosztów własnych. Gdyby jednak wiosna miała charakter tulipanowy, to na truskawkach straci około 1 tys. zł, a tulipany przyniosłyby mu 2 tys. zł zysku.

Działkowicz **D** ma więc do rozegrania grę, w której przeciwnikiem jego jest natura **N**. Działkowicz może zastosować jedną z dwu strategii: posadzić truskawki (**t**) lub posadzić tulipany (**tu**). Wierzy on również w to, że Natura zastosuje jedną z dwu swoich strategii: pogodę truskawkową (**T**) lub pogodę tulipanową (**TU**). Macierz tej gry (z punktu widzenia gracza **D**) podana jest obok; liczby w niej występujące oznaczają zysk gracza **D** w tysiącach złotych. Gracz **D** nie jest ryzykantem. Nad nadzieję ewentualnego dużego zysku przedkłada on zarobek pewny, choć mały. Powinien więc zastosować swą strategię minimaxową*, w tym przypadku strategię **t**. Jest to rzeczywiście strategia ostrożna, ale nie jest zadowalająca: gwarantuje mu ona tylko to, że nic nie straci. Gdyby przynajmniej Natura była przeciwnikiem rozsądnym, to musiałaby się liczyć z tym, że może przegrać nawet 2 (strategią minimaxową **N** jest **TU**) i, być może, dałoby się coś od niej wytargować. Ale Natura przegranych nie liczy i zachowuje się jak gracz, który co prawda przystępuje do gry, ale wcale nie interesuje się jej wynikiem. Czy mimo to nie można w tej grze uzyskać nic ponad gwarancję zwrotu kosztów własnych?

Można. Działkowicza nic nie zmusza do wyboru jednej z czystych strategii: **t** lub **tu**. Może on, choć nie brał tego początkowo pod uwagę, zastosować strategię mieszaną: część działki obsadzić tulipanami, a resztę truskawkami. Jeśli na przykład dokładnie połowę przeznaczy pod tulipany, a drugą pod truskawki (powiemy, że zastosował strategię $(1/2, 1/2)$), to przy pogodzie **T** łączny

zysk z obu upraw wyniesie $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$, a więc 1500 zł, natomiast

przy pogodzie **TU** Działkowicz zarobi 500 zł, bo $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$. Zatem

strategia $(1/2, 1/2)$ jest bezpieczniejsza niż strategia czysta **tu**. Powstaje jednak nowy problem: czy jest to strategia najkorzystniejsza, a jeśli nie, to jak znaleźć strategię mieszaną, która gwarantuje zysk możliwie największy?

Strategię mieszaną Działkowicza, polegającą na przeznaczeniu części x obszaru działki pod tulipany i części $1-x$ pod truskawki, oznaczmy symbolem $(x, 1-x)$. Oczywiście $0 \leq x \leq 1$. Z oczywistych względów symbol $(1, 0)$ oznacza strategię czystą **tu** („wszystko pod tulipany”), a symbol $(0, 1)$ — strategię czystą **t** („wszystko pod truskawki”). Jeśli **N** zastosuje strategię **T**, to **D** może przy zastosowaniu swej strategii $(x, 1-x)$ oczekiwać zysku

$$z_1(x) = x \cdot 0 + (1-x) \cdot 3 = 3 - 3x,$$

natomiast przy strategii **TU** oczekiwany zysk wynosi

$$z_2(x) = x \cdot 2 + (1-x) \cdot (-1) = 3x - 1.$$

Zatem **D** może w tej sytuacji oczekiwać na pewno takiego zysku, który jest mniejszą z liczb $z_1(x)$, $z_2(x)$ (lub każdą z nich, jeśli obie są równe).

Rozwiązanie problemu Działkowicza sprowadza się do znalezienia takiego x_0 , przy którym ta gwarantowana wartość zysku jest możliwie największa.

Działkowicz	Natura	
	T	TU
	tu	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
t		

* Por. «Delta» nr 2.



Rozwiązanie zadania M10.

Zauważmy, że liczba $2N$ kończy się cyfrą 0, wobec czego N równa się 0 lub 5. Gdyby $N = 5$, to z ostatniej (piątej) kolumny „mielibyśmy w pamięci” $1 + 1 + T + 2E = 10a + T$, skąd $1 = 2(5a - E)$, co jest niemożliwe. Musi więc być $N = 0$, wobec tego $E = 5$. Jakaś cyfra musiała być „zapamiętana” przy przejściu od kolumny drugiej do pierwszej; była to jedynka, gdyż suma w kolumnie drugiej jest równa 10 lub 11. Tak więc I równa się 0 lub 1, ale N jest zerem, więc $I = 1 + 0 = 9$. Z dodawania kolumny trzeciej „zapamiętaliśmy” więc liczbę 2. Wobec tego, że z kolumny przedostatniej zostało nam „w pamięci” 1, to $1 + R + 2T = 20 + X$, ale $X \geq 2$, $R \leq 8$ (cyfry 0, 1, 9 są już „zajęte”), więc $1 + 8 + 2T \geq 1 + R + 2T = 20 + X \geq 20 + 2$, $2T \geq 13$, T równa się 7 lub 8. Gdyby T równało się 7, to R równałoby się 8 (bo jeżeli $R < 7$, to $R \leq 6$ i $1 + R + 2T \leq 1 + 6 + 2 \cdot 7 = 21 < 22$) oraz X równałoby się 3. Jest to niemożliwe, gdyż nie zostałaby żadna para kolejnych cyfr, którymi muszą być F i S . Mamy więc: $T = 8$, $1 + R + 2 \cdot 8 = 20 + X$, $3 + X = R$, a ponieważ musi zostać para kolejnych cyfr dla F i S , więc $X = 4$ i $R = 7$; wtedy oczywiście $F = 2$, $S = 3$ i pozostaje $Y = 6$. Było więc $29\ 786 + 850 + 850 = 31\ 486$.

Rozwiązujemy (por. rysunek obok). Jeśli zysk $z_1(x)$ ma być nie większy od $z_2(x)$:

$$z_1(x) = 3 - 3x \leq 3x - 1 = z_2(x),$$

to musi być spełniony warunek $x \geq 2/3$, i na odwrót. Innymi słowy, dla $2/3 \leq x \leq 1$ gwarantowany zysk wynosi $z_1(x) = 3 - 3x$. Ponieważ zaś funkcja liniowa $3 - 3x$ jest malejąca, to największa wartość osiąga ona w lewym końcu tego przedziału: dla $x = 2/3$. Analogicznie stwierdzamy, że dla pozostałych x ($0 \leq x \leq 2/3$) gwarantowany zysk wynosi $z_2(x) = 3x - 1$, przy czym jest on największy na prawym końcu tego przedziału: dla $x = 2/3$. Przy tym $z_1(2/3) = z_2(2/3) = 1$. Zatem rozwiązaniem naszego zagadnienia jest $x_0 = 2/3$, co odpowiada strategii $(2/3, 1/3)$.

Istnieje zatem najlepsza strategia Działkowicza w jego grze przeciw Naturze. Jest nią strategia mieszana polegająca na obsadzeniu $2/3$ działki tulipanami, a $1/3$ działki truskawkami. Przy zastosowaniu tej strategii osiągnie on na pewno zysk wynoszący co najmniej 1 tys. zł — niezależnie od kaprysów aury. Dla Czytelnika, któremu botaniczna fabuła rozwiązywanego tu zagadnienia wydała się nudna, a działkowicz — dusigroszem bez polotu, dodatkowa informacja: „Działkowicz” jest kryptonimem dowódcy organizującego obronę na pewnym odcinku frontu, „Natura” jest sztabem przeciwnika, strategia T to po prostu zmasowany atak bronią pancerną, a strategia TU — potężne uderzenie z powietrza. Interpretacja strategii t i tu jest już łatwa do odszyfrowania. Czym są tulipany i truskawki?

Zadania

1. Spójrzmy na rozważaną powyżej grę okiem gracza N. Macierz gry oglądanej z tej pozycji podana jest obok. Załóżmy teraz, że gracz N może stosować strategię mieszane (założenie takie jest sensowne przy batalistycznej interpretacji gry), a gracz D może stosować tylko strategię czyste. Udowodnić, że gracz N może sobie zapewnić to, że nie przegra więcej niż 1. Podać strategię optymalną gracza N, wykonać wykres ilustrujący rozwiązanie.

Rozwiązanie na str. 13.

2. Załóżmy, że w rozważanej grze obaj gracze mogą stosować strategię mieszane. Udowodnić, że jeśli D stosuje swą optymalną strategię mieszana, to przy żadnej strategii mieszanej przeciwnika nie otrzyma on mniej, niż to, co gwarantuje mu strategia optymalna przeciwko strategiom czystym. Wykazać, że tę samą własność ma strategia optymalna gracza N.

Rozwiązanie na str. 7.

Zadania

Redaguje dr Jędrzej JĘDRZEJEWSKI

F4. Naładowany kondensator o pojemności C_1 połączono poprzez opornik z drugim, nie naładowanym, o pojemności C_2 według schematu. Po zamknięciu klucza K połowa energii naładowanego kondensatora wydzieliła się na oporniku w postaci ciepła. Zakładamy, że indukcyjność elementów obwodu można pominąć. Oblicz wartość oporu R oraz powiedz, czy kondensatory są takiej samej, czy też różnej barwy (obydwa pochodzą z tej samej serii produkcyjnej).

Rozwiązanie na str. 16.

Redaguje mgr Andrzej MAKOWSKI

M10. W poniższym dodawaniu różne litery oznaczają różne cyfry

$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ \text{TEN} \\ + \text{TEN} \\ \hline \text{SIXTY} \end{array}$$

Jaka litera oznacza jaką cyfrę?

(Po angielsku: *forty* = 40, *ten* = 10, *sixty* = 60. Zachęcamy Czytelników do układania i nadsyłania podobnych zadań, w których wystąpią polskie wyrazy, układające się w sensowne zwroty; rozwiązanie powinno być jednoznaczne).

Rozwiązanie na str. 4.

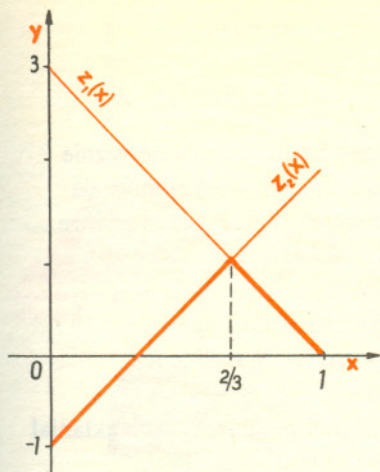
M11. W mnożeniu obok występowały tylko cyfry 2, 3, 5, 7.

Odtworzyć zapis tego mnożenia.

Rozwiązanie na str. 13.

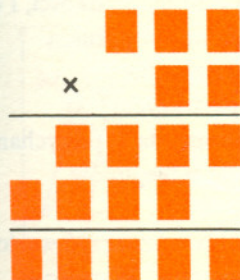
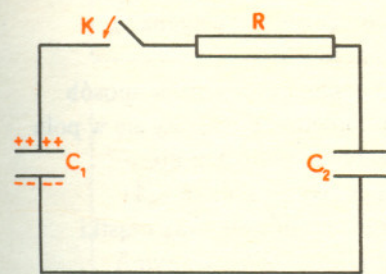
M12. Udowodnić, że na płaszczyźnie istnieje sześć punktów o tej własności, że każdy trójkąt o wierzchołkach leżących w pewnych spośród tych punktów jest równoramienny.

Rozwiązanie na str. 15.



Działkowicz

	tu	t
Natura	T	(0 -3)
	TU	(-2 1)



Kwarki i monopole magnetyczne odkryte!

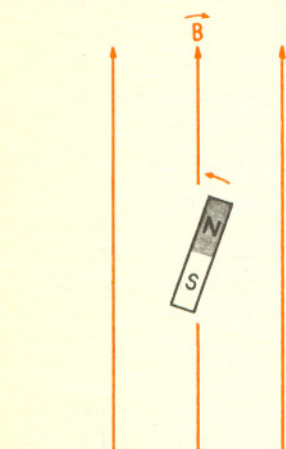
Dwa zające za jednym strzałem

Wszystkie ze znanych dotychczas cząstek elementarnych albo są magnetycznie obojętne, albo są obdarzone momentem magnetycznym, czyli — symbolicznie rzecz ujmując — stanowią układ dwóch biegunów magnetycznych, albo jeszcze inaczej: są dipolami magnetycznymi. Fizyka nie zna jednak zasad, które wykluczałyby możliwość istnienia cząstek obdarzonych pojedynczymi „ładunkami magnetycznymi” (symbolicznie: pojedynczymi biegunami magnetycznymi). Nazwano je monopolami magnetycznymi. Wszelkie ich poszukiwania nie dawały żadnych rezultatów. Aż oto...

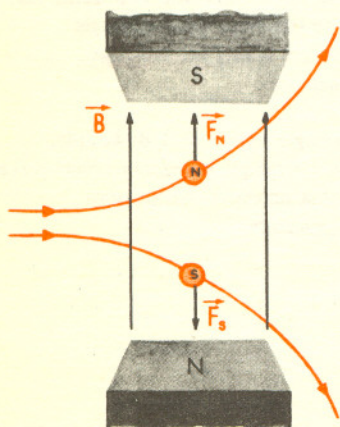
Fakt nieznaledzenia w przyrodzie pojedynczych monopolu magnetycznych skłaniał niektórych fizyków do wniosku, że cząstek takich w ogóle nie ma. Tych, którzy usiłowali je odkryć, uważali więc za maniaków. Nic dziwnego, że w takiej atmosferze maniacy zaczęli działać w konspiracji. W ścisłej tajemnicy zbudowali potężny akcelerator cząstek naładowanych, który przyspieszał neutrony do energii tysiące razy przewyższającej energię uzyskiwaną w najpotężniejszych akceleratorach dotychczas stosowanych (zasady fizyczne i szczegóły konstrukcyjne tego nowego typu akceleratorów trzymane są w tajemnicy). Zbudowano dwa takie akceleratory. W każdym z nich rozpedzono wiązkę neutronów, po czym dwie takie wiązki skierowano jedną na drugą. Potwornie silne zderzenia czołowe działały w tym przypadku jak nóż, który niejako kroził neutrony na... nie, nie na połowy, lecz na... trzy części. Rzeczywistość okazała się bardziej skomplikowana, niż przypuszczano. Bo oto obok monopolu magnetycznych odkryto cząstki magnetycznie obojętne, to znaczy nie obdarzone żadnym „ładunkiem magnetycznym” (symbolicznie: biegunem magnetycznym). Zidentyfikować te cząstki było bardzo łatwo. O ile dipol magnetyczny ustawia się podobnie jak magnes w jednorodnym polu magnetycznym wzdłuż linii sił tego pola (rysunek 1), o tyle monopol magnetyczny jest przyciągany ku odpowiedniemu biegunowi elektromagnesu wytwarzającego pole magnetyczne (rysunek 2), podobnie jak ciało naładowane elektrycznie porusza się ku jednej z elektrod wytwarzających pole elektryczne. Cząstka obdarzona południowym biegunem magnetycznym będzie więc dążyć do północnego bieguna elektromagnesu, cząstka obdarzona północnym biegunem magnetycznym — do południowego bieguna elektromagnesu, a cząstka magnetycznie obojętne nie będzie przyciągana (ani odpychana) przez żaden z biegunów elektromagnesu.

Nie od razu jednak cząstki te zidentyfikowano, gdyż zachowywały się w sposób bardziej złożony. Wszystkie, nawet te magnetycznie obojętne, poruszały się w polu magnetycznym po zakrzywionym torze. I to jak zakrzywionym! Ani do biegunów elektromagnesu, ani w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola magnetycznego (rysunek 3). Postawiono więc hipotezę: monopole oraz cząstki magnetycznie obojętne muszą być obdarzone też ładunkami elektrycznymi. Cząstka, która ma tylko ładunek elektryczny, zakrzywia swój bieg w polu magnetycznym pod działaniem siły Lorentza, prostopadłej i do jej prędkości, i do kierunku linii sił pola magnetycznego (rysunek 4). Skoro monopol porusza się w tak skomplikowany sposób, wobec tego musi nań działać siła Lorentza, zakrzywiająca jego ruch w kierunku leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do linii sił pola magnetycznego, oraz siła przyciągania (i odpychania) magnetycznego, zakrzywiająca jego ruch w kierunku jednego z biegunów elektromagnesu.

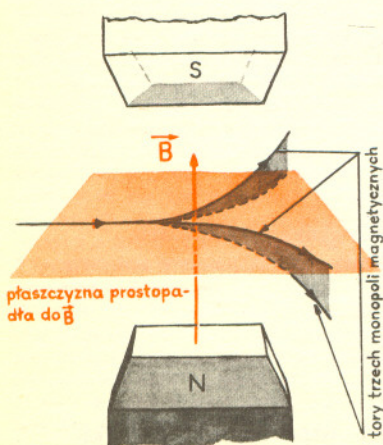
Dokładne pomiary w dodatkowych eksperymentach pozwoliły wyznaczyć wartości i „ładunków magnetycznych” monopolu, i ich ładunki elektryczne. Wartości „ładunków magnetycznych” na razie nie podano. Zaskakujące są jednak wyniki pomiarów ładunku elektrycznego monopolu. Bo oto okazało się, że cząstka magnetycznie obojętne ma ładunek elektryczny wynoszący... $-1/3e$, cząstka



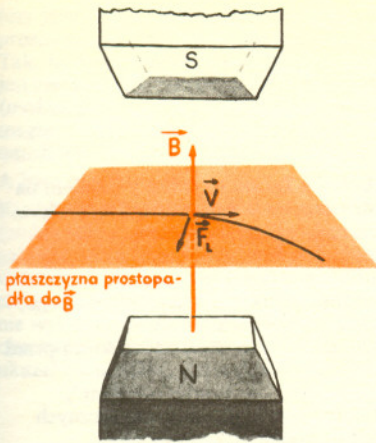
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

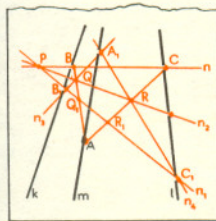
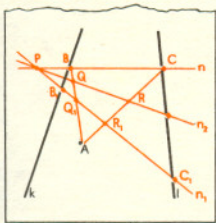
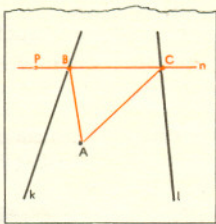
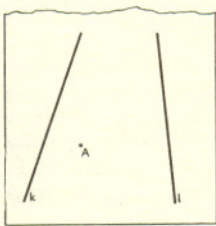
obdarzona biegunem północnym także $-1/3e$, obdarzona zaś biegunem południowym $+2/3e$, gdzie e , to ładunek elementarny, uważany dotychczas za najmniejszą możliwą porcję ładunku elektrycznego.

Cóż to za cząstki? Są to istniejące dotychczas jedynie w wyobraźni fizyków kwarki, czyli cząstki subelementarne, z których — zgodnie z hipotezą Gell-Manna i Zweiga — powinny składać się silnie oddziaływające cząstki elementarne. Ich masa, jak wynika z dalszych pomiarów, kilkadziesiąt razy przewyższa masę neutronu. Czy są trwałe — jeszcze nie wiadomo.

Tak więc w jednym eksperymencie (a właściwie ich serii) dokonano za jednym zamachem podwójnego odkrycia: monopoli magnetycznych i kwarków, przy czym okazało się, że są to te same cząstki! Trudno przecenić znaczenie tego sensacyjnego odkrycia. Dalsze eksperymenty są w toku. W każdym razie od dziś można już uważać, że neutron to trójka trzech kwarków, z których dwa są jednocześnie monopolami obdarzonymi przeciwnymi „ładunkami magnetycznymi” (potocznie: biegunami magnetycznymi), a trzeci jest magnetycznie obojętny.

Z.P.

Tylko linijką



Rozważmy następującą sytuację: na kartce papieru narysowane są dwie proste nierównoległe k i l . Proste te nie przecinają się. Jak to może być? Ano tak, że kartka jest zbyt mała, aby punkt przecięcia k i l znalazł się na niej. Weźmy jeszcze pod uwagę punkt A , leżący „między” k i l . Zadanie polega na tym, by przez punkt A poprowadzić prostą m , współpękową z k i l , to znaczy przechodzącą przez punkt przecięcia tych prostych. Ale przecież tego punktu nie mamy! A do dyspozycji dano nam tylko linijkę.

Oczywiście można by powiększyć kartkę (np. doklejając do niej następną). Rzecz w tym jednak, że zadanie jest wykonalne i bez takich ułatwień. Jak? Spróbujmy rysować; może zdarzy się, że narysujemy akurat to, co trzeba.

Poprowadźmy na początek prostą n , nie przechodzącą przez A i przecinającą (na kartce!) proste k i l odpowiednio w punktach B i C . Obierzmy (również na kartce!) punkt P leżący na n , a nie należący do odcinka \overline{BC} . Przez ten punkt poprowadźmy prostą n_1 (różną od n), która przecina (też na kartce!) proste k i l (w punktach B_1 i C_1) oraz odcinki \overline{AB} i \overline{AC} (w punktach Q_1 i R_1).

Aby powiększyć bałagan, poprowadźmy jeszcze jedną prostą — n_2 (różną od n_1) — również przez punkt P tak, by przecinała odcinki $\overline{Q_1B}$ i $\overline{R_1C}$ (w punktach Q i R). Jakby tego było mało, narysujmy jeszcze prostą n_3 przechodzącą przez B_1 i Q oraz prostą n_4 przez C_1 i R . Czy proste n_3 i n_4 przecinają się na kartce? Jeśli nie, to trzeba prostą n_2 zastąpić inną, leżącą „bliżej” prostej n_1 , i zgodnie z tym zmienić punkty Q i R , a więc i proste n_3 i n_4 .

Teraz już proste n_3 i n_4 przecinają się (na kartce) w punkcie A_1 . Poprowadźmy jeszcze prostą przez punkty A i A_1 . Oznaczmy ją m . Jak to? To jest właśnie szukana prosta? A dlaczego?

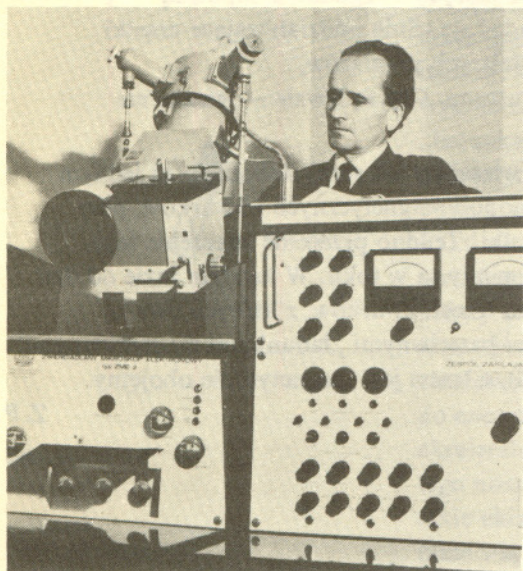
Właśnie, dlaczego? Odpowiedź na to pytanie znaleźć można w każdej książce traktującej o geometrii rzutowej (hasło *Desargues*). Tym, którzy odpowiedź znajdą, polecamy jako zadanie wykonanie analogicznej konstrukcji dla punktu A , nie leżącego „między” k i l .

M.

Rozwiązanie — Gry

Zad. 2. Jeśli D stosuje strategię $(x, 1-x)$ a N — strategię $(y, 1-y)$, to wygraną D jest $z = y \cdot z_1(x) + (1-y) \cdot z_2(x)$. Jeśli więc $x = 2/3$, to $z = y \cdot z_1(2/3) + (1-y)z_2(2/3) = y \cdot 1 + (1-y) \cdot 1 = 1$, co dowodzi tezy. Dla gracza N — analogicznie.

«Delta» z wizytą w Katedrze Fizyki i Elektroniki Ciała Stałego WAT



Doc. dr hab. Edmund Igras przy zwierciadlanym mikroskopie elektronowym

Katedra ta, kierowana przez doc. dra hab. Edmunda Igrasa to jedno z niewielu na świecie laboratoriów wyspecjalizowanych między innymi w budowie unikalnych przyrządów badawczych — zwierciadlanym mikroskopów elektronowych. Za pomocą takiego mikroskopu można na własne oczy zobaczyć ni mniej ni więcej tylko... pole elektryczne, a dokładniej: jego subtelny rozkład w materiale. W odróżnieniu od zwykłego, czyli prześwietleniowego mikroskopu elektronowego, w którym badany preparat prześwietla się wiązką szybkich elektronów, w mikroskopie zwierciadlanym na obiekt kieruje się wiązkę elektronów, którą przed obiektem wyhamowuje się do bardzo niewielkich prędkości, a po „odbiciu” odeń znowu się przyspiesza, by otrzymać obraz obiektu „w świetle odbitym”, a precyzyjniej — nie tyle obraz samego obiektu, ile... rozkładu pól elektrycznych przy powierzchni preparatu. (Dokładniej zasadę działania elektronowego mikroskopu zwierciadlanego wyjaśnia doc. Igras w artykule, który zamieścimy w jednym z następnym numerów).

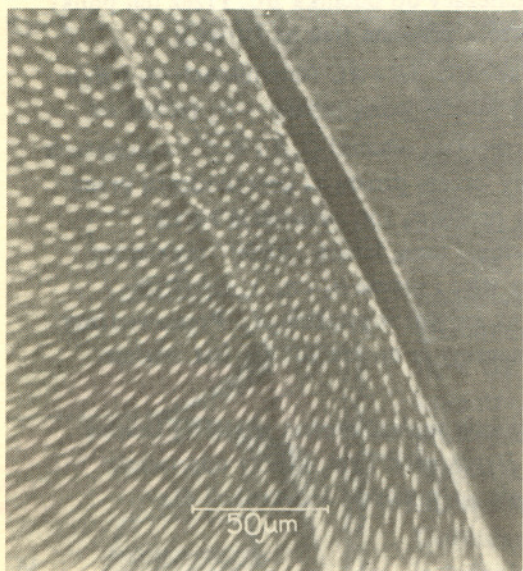
Pierwszy prześwietleniowy mikroskop elektronowy zbudowali M. Knoll i E. Ruska w 1931 r. Sześć lat później, za sprawą H. Recknagela, R. Orthubera i G. Hottenrotha, powstała idea mikroskopu zwierciadlanego (odbiciowego). Jako bardziej skomplikowana nie została jednak zrealizowana, gdyż po prostu nie warto było wtedy płacić dodatkowymi komplikacjami za niewielkie, jak wtedy sądzono, korzyści, które kryły się w możliwości bezpośrednich obserwacji subtelnych rozkładów pól elektrycznych w materiałach (zwłaszcza że mikroskop zwierciadlany nie daje takich powiększeń, jak jego starszy brat). Ale oto kilkanaście lat temu powrócono do tej koncepcji. Przyczyną był rozwój badań nad półprzewodnikami i urządzeniami półprzewodnikowymi (diody, tranzystory). Zrodziła się wtedy pilna potrzeba nowych metod dokładnych badań elektrycznej struktury półprzewodników, zwłaszcza zaś — struktury elektrycznej złącz $n-p$ (kontaktów dwóch półprzewodników: jednego — typu n , drugiego zaś — typu p).

W takiej mniej więcej sytuacji zetknął się z ideą zwierciadlanego mikroskopu elektronowego doc. Igras (wówczas jeszcze magister) jako aspirant profesora G. W. Spiwaka w Uniwersytecie Moskiewskim. Wielce go ta idea zaintrygowała. Po powrocie z aspirantury postanowił nadać jej kształt gotowego urządzenia.

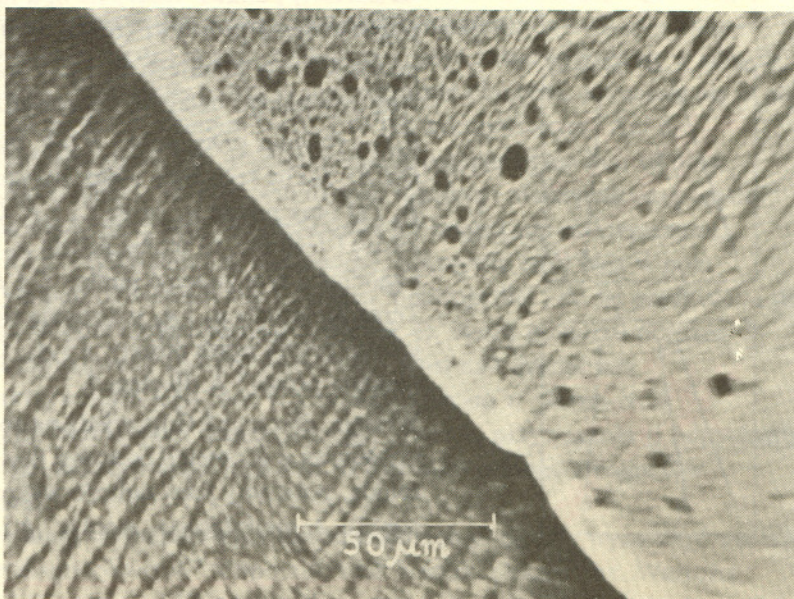
Profesor Leonard Sosnowski, przełożony docenta Igrasa w Instytucie Fizyki PAN, odniósł się do tego bardzo przychylnie. W rezultacie w 1966 roku doc. Igras wraz z doktorem Tadeuszem Warmińskim zbudowali pierwszy polski zwierciadlany mikroskop elektronowy, stosując w nim szereg oryginalnych pomysłów konstrukcyjnych (dwa zostały opatentowane). Sprawą zainteresował się wtedy ówczesny Komitet Nauki i Techniki, który przyznał odpowiednie środki.

Ulepszona wersja urządzenia, w pięciu egzemplarzach, powstała w 1969 roku, już w Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie, gdzie docent Igras objął katedrę.

Zapytany o dramatyczne momenty w swej pracy rozmówca nasz odpowiedział: praca w laboratorium to jest przede wszystkim praca; wytrwała, często uciążliwa, ale to jedyna metoda, by osiągnąć cel. Tu nie ma co liczyć na szczęście



1. Obraz (elektryczny) kilku barier napięciowych na powierzchni krzemu (w przybliżeniu równoległe linie) oraz licznych niejednorodności elektrycznych powstałych dzięki lokalnym silnym skupiskom atomów domieszek (jasne plamki)

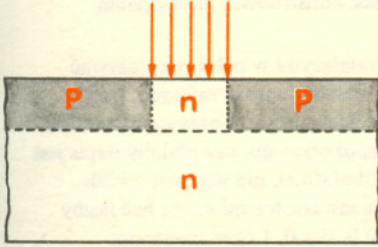


2. Obraz (elektryczny) złącza $p-n$ w krzemie typu n , domieszkowanym atomami galu

(czy jednak zawsze?) ani też spodziewać się nadzwyczajnych rzeczy. Trzeba po prostu pracować, pokonując systematycznie wszystkie kolejne trudności i kłopoty. Tak, ta praca dała podziwu godne rezultaty. Zwierciadlany mikroskop elektronowy jest rzeczywiście niezastąpiony w badaniach elektrycznej budowy złącz $n-p$ (można go też stosować do badań struktury elektrycznej dielektryków, a także magnetycznej ferromagnetyków). Co więcej, tenże mikroskop zwierciadlany umożliwił swemu konstruktorowi odkrycie zupełnie nowego zjawiska.

A było to tak.

Kiedyś na próbce krzemu typu n z cieniuteńką warstewką typu p na wierzchu (zmięnię typu przewodnictwa osiągnięto przez wprowadzenie do krzemu atomów galu) położono dość przypadkowo drobną siateczkę metalową (na takich siateczkach umieszcza się preparaty do badań w prześwietleniowym mikroskopie elektronowym). Obserwacja takiego układu w mikroskopie zwierciadlanym nie wykazała niczego ciekawego. Jednakże po zdjęciu siateczki i ponownej obserwacji obiektu (w tymże mikroskopie zwierciadlanym) na jego powierzchni ukazał się... obraz siateczki. Przypominamy: mikroskop zwierciadlany ukazuje

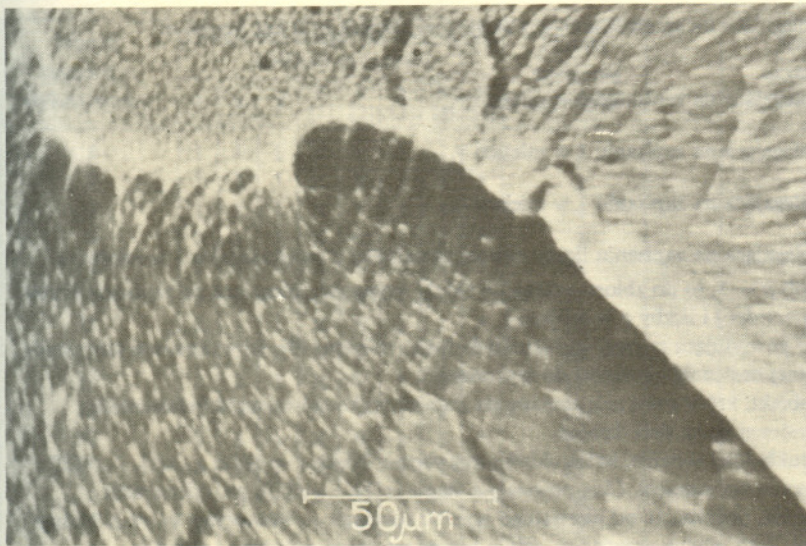


Pod wpływem bombardowania jonami skupionymi w cieniuteńką wiązkę, cienka warstewka typu p na powierzchni krzemu typu n zmienia typ przewodnictwa (z powrotem na n)

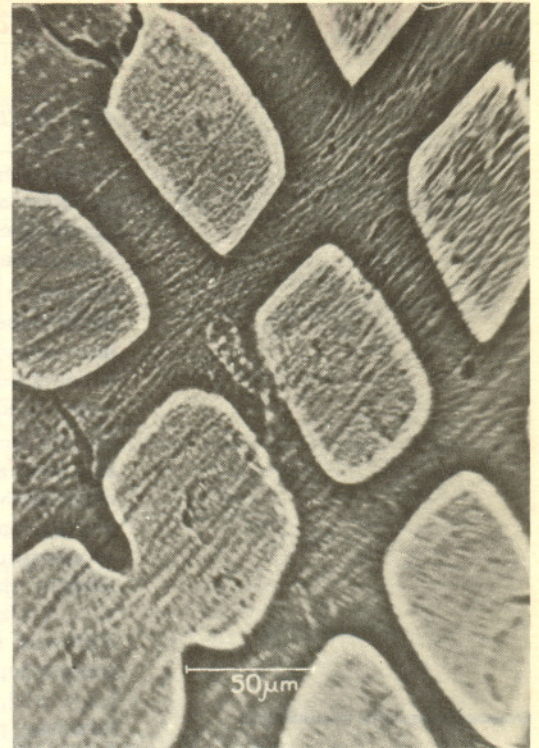
(w mikroskopie, choć jest w nim dość wysoka próżnia, są jednak resztki powietrza; strumienie elektronów zderzają się z molekułami powietrza i jonizują je; powstałe jony rozpędzają się ku próbce i uderzają w nią). No, ale skoro tak, wobec tego ten sam efekt powinno wywołać korpuskularne promieniowanie jonizujące (na przykład strumienie cząstek alfa). Pomiarów znowu potwierdzają poprawność tego przypuszczenia.

Efekt jest silny, więc i łatwy do zmierzenia. Można go też wykorzystać do pomiaru dawek promieniowania jonizującego. I taki dozymetr, bardzo czuły i o niewielkich, miniaturowych rozmiarach, został rzeczywiście skonstruowany (i opatentowany). Opisane zjawisko kryje więcej możliwości zastosowań — na przykład do produkcji miniaturowych złącz $n-p$ w dużych ilościach (rzędu dziesiątków tysięcy) na powierzchni o wielkości... łebka od szpilki; „ostrą” wiązką jonów można byłoby też na warstewce zapisać „maczką” wiele różnych informacji (które odczytać można jedynie w zwierciadlanym mikroskopie elektronowym). Zjawisko jest też intrygujące z fizycznego punktu widzenia (jego wyjaśnienie — zobacz zapowiadany artykuł doc. Igrasa), czemu bowiem występuje tylko w krzemie domieszkowanym galem, a w innych przypadkach nie? Być może, odpowiedź na to pytanie rozszerzy naszą wiedzę o roli i zachowaniu się atomów domieszek w półprzewodnikach.

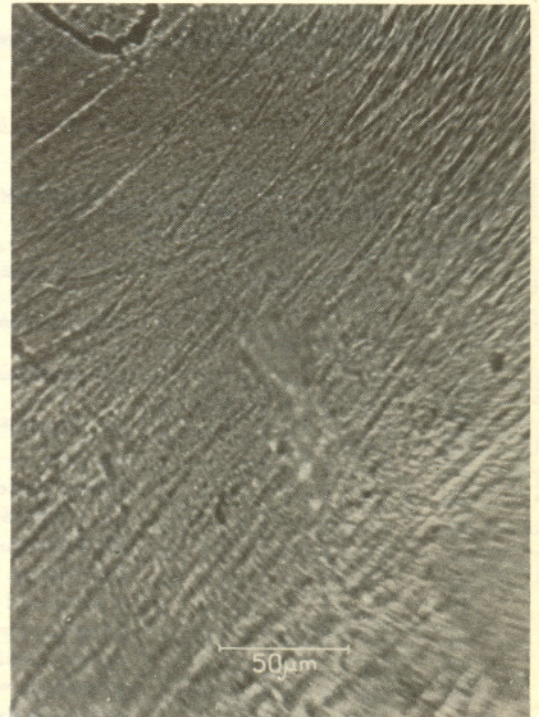
Z.P.



3. Obraz (elektryczny) tego samego obszaru powierzchni krzemu, co na zdjęciu 2, lecz po krótkim bombardowaniu jonami części powierzchni w pobliżu złącza. Wskutek zneutralizowania atomów galu pod względem aktywności elektrycznej przez bombardujące jony, obszar typu n (jaśniejszy) rozszerzył się



4. Obraz (elektryczny) struktur typu n i typu p na powierzchni krzemu. Części powierzchni o przewodnictwie typu n są jaśniejsze. Początkowo cała powierzchnia krzemu była typu p , gdyż krzem domieszkowano powierzchniowo galem. Po położeniu na próbce siateczki bombardowano układ jonami. W miejscach nie zasłoniętych atomy galu straciły, pod wpływem bombardujących jonów, swą aktywność elektryczną i nastąpiła zmiana typu przewodnictwa na pierwotny, to jest na typ n . W obszarach zasłoniętych drucikami zachował się, oczywiście, typ przewodnictwa uwarunkowany przez atomy galu (to jest typ p)



5. Obraz tej samej części powierzchni, co na zdjęciu 4, widzianej w zwykłym mikroskopie (światłym). Tutaj widać tylko drobne rysy geometryczne

Algorytmy cz. II. Program który nie liczy

dr Andrzej SKOWRON

Stwierdziłmy poprzednio, że do sprecyzowania, czym jest algorytm, niezbędne jest określenie jego sterowania. Sterowanie algorytmu scharakteryzowane jest przez zbiór czynności elementarnych (nazywanych rozkazami), które to sterowanie „umie” wykonać, oraz przez zdolność do wykonywania tych czynności w kolejności określonej przez sieć działań.

Urządzenie lub człowiek pełniący rolę sterowania w przypadku konkretnego algorytmu, często jest w stanie pełnić rolę sterowania dla wielu innych algorytmów. Mając informacje o tym, jakie czynności elementarne umie wykonać obiekt pełniący rolę sterowania oraz jak należy budować sieci działań dla tego obiektu, stawiamy pytanie: jak konstruować sieci działań wyznaczające algorytmy o zadanych własnościach?

Nie dysponujemy niestety metodami matematycznymi, pozwalającymi w pełni rozwiązywać tego typu zadania. Dlatego umiejętność konstruowania sieci działań wyznaczających, przy określonych własnościach sterowania, algorytmy o żądanych własnościach, nazywa się czasem sztuką programowania. Rozważmy przykład algorytmu rozpoznającego, czy podany napis jest poprawnym zapisem w układzie rzymskim liczby całkowitej dodatniej, nie większej od 20. Załóżmy, że dysponujemy miejscami o nazwach j, z , których zawartościami mogą być liczby 1, ..., 5, miejscem o nazwie y , którego zawartością mogą być liczby 0, 1 oraz miejscami o nazwach $x[1], \dots, x[5]$, których zawartościami mogą być symbole $I, V, X, *$. Zgodnie z umową przyjętą poprzednio $j, z, y, x[1], \dots, x[5]$ oznaczają odpowiednio zawartości miejsc $j, z, y, x[1], \dots, x[5]$.

Jako stany pamięci przyjmujemy ciągi $(j, z, y, x[1], \dots, x[5])$.

Założmy, że dysponujemy sterowaniem, które „umie” wykonać tylko następujące czynności elementarne (rozказы):

1. Jeśli p jest liczbą całkowitą i $0 \leq p \leq 5$, to do zbioru rozkazów należy czynność polegająca na zapisaniu liczby p w miejscu o nazwie j .
2. Czynność polegająca na sprawdzeniu, który z symboli $I, V, X, *$ jest zapisany w miejscu o nazwie $x[k]$, gdzie k jest równe sumie zawartości miejsc j, z , gdy $j+z \leq 5$ oraz 1 w pozostałych przypadkach.
3. Jeśli p jest liczbą całkowitą i $0 \leq p \leq 2$, to do zbioru rozkazów należy czynność polegająca na sprawdzeniu, który z symboli $I, V, X, *$ jest zapisany w miejscu o nazwie $x[k]$, gdzie k jest równe sumie zawartości miejsca j oraz liczby p , gdy $j+p \leq 5$ oraz 1 w pozostałych przypadkach.
4. Czynność polegająca na sprawdzeniu, czy zawartość miejsca j jest równa 2.
5. Czynność polegająca na sprawdzeniu, czy zawartość miejsca z jest równa 4.
6. Czynność polegająca na sprawdzeniu, czy zawartość miejsca $x[3]$ jest równa $*$.
7. Czynność polegająca na zapisaniu 0 w miejscu y .
8. Czynność polegająca na zapisaniu 1 w miejscu y .
9. Czynność polegająca na zapisaniu 1 w miejscu z .
10. Czynność polegająca na zapisaniu liczby równej zawartości z zwiększonej o 1 w miejscu z .
11. Jeśli $p = 2$ lub $p = 3$, to do zbioru rozkazów należy czynność polegająca na zapisaniu liczby równej sumie zawartości j i liczby p w miejscu j .
12. Czynność nie powodująca zmiany zawartości żadnego miejsca. (Po jej wykonaniu sterowanie nie wyznacza żadnej następnej czynności do wykonania).

Przyjmujemy, że obiekt, który pełni rolę sterowania „umie” wykonać czynności elementarne w kolejności określonej przez sieci działań.

Określmy teraz dokładniej zadanie, które chcemy rozwiązać. Niech $c = (j, z, y, x[1], \dots, x[5])$ będzie dowolnym stanem pamięci. Ciąg powstały z ciągu $(x[1], \dots, x[5])$, po odrzuceniu wszystkich wyrazów, poczynając od pierwszego wyrazu równego $*$, oznaczmy przez ζ . Należy podać sieć działań, taką, aby w przypadku, gdy ζ jest poprawnym zapisem w układzie rzymskim liczby całkowitej dodatniej nie większej od 20, zawartość miejsca y , po zakończeniu obliczenia o stanie początkowym c , była równa 0; w przeciwnym wypadku aby była ona równa 1. Przykład takiej sieci działań podano na rysunku.

Oznaczenia czynności elementarnych

$j \leftarrow p$
$(0 \leq p \leq 5)$
$x[j+z] =$
$I \quad V \quad X \quad *$

$x[j+p] =$
$I \quad V \quad X \quad *$

$0 \leq p \leq 2$

$j = 2$
T N

$z = 4$
T N

$x[3] = *$
T N

$y \leftarrow 0$

$y \leftarrow 1$

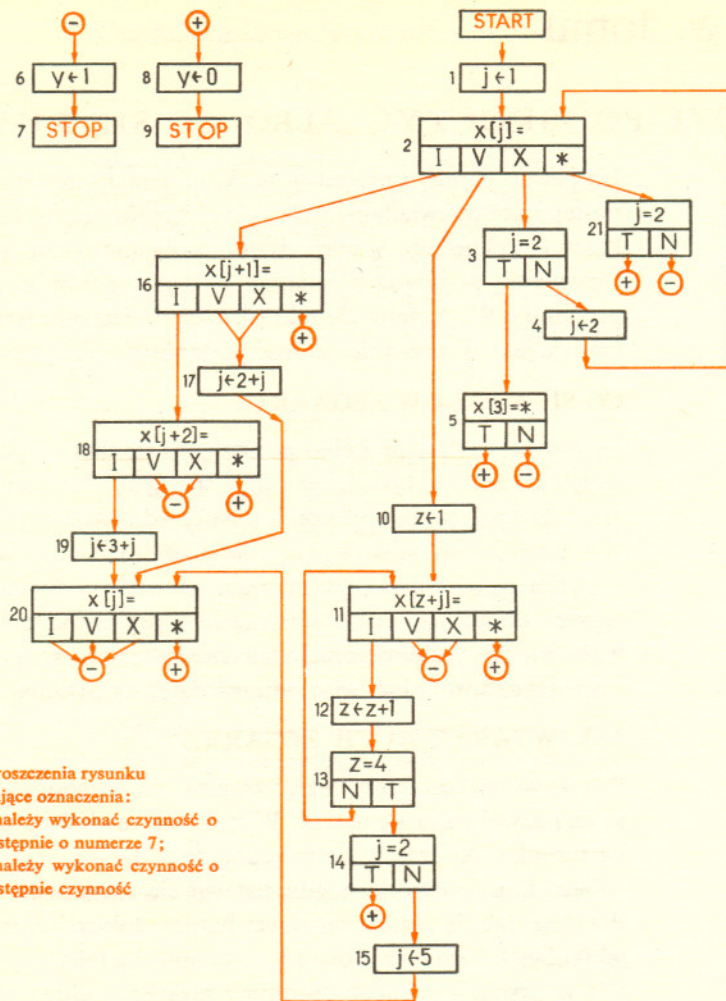
$z \leftarrow 1$

$z \leftarrow z+1$

$j \leftarrow j+p$

$(p = 2, 3)$

STOP



Uwaga: Dla uproszczenia rysunku przyjęto następujące oznaczenia:
 — oznacza, że należy wykonać czynność o numerze 6, a następnie o numerze 7;
 + oznacza, że należy wykonać czynność o numerze 8, a następnie czynność o numerze 9.

Sieć działań algorytmu rozpoznającego, czy podany napis jest poprawnym zapisem w układzie rzymskim liczby całkowitej, dodatniej, nie większej od 20.

W tabelach 1 i 2 podano, jak będą zmieniały się zawartości miejsc pamięci w trakcie realizowania przez sterowanie czynności zgodnie z siecią działań podaną na rysunku, gdy początkowy stan pamięci jest równy odpowiednio (1 1 1 X V I I *) i (1 4 0 V I I I I)

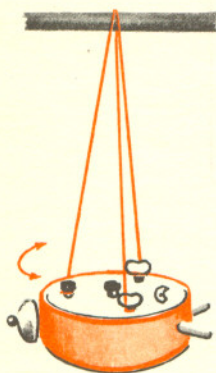
Tabela 1

Numer czynności wykonywanej	Zawartości miejsc po wykonaniu kolejnej czynności							Numer następnej czynności	
	j	z	y	x [1]	x [2]	x [3]	x [4]		x [5]
1	1	1	1	X	V	I	I	*	2
2	1	1	1	X	V	I	I	*	3
3	1	1	1	X	V	I	I	*	4
4	2	1	1	X	V	I	I	*	2
2	2	1	1	X	V	I	I	*	10
10	2	1	1	X	V	I	I	*	11
11	2	1	1	X	V	I	I	*	12
12	2	2	1	X	V	I	I	*	13
13	2	2	1	X	V	I	I	*	11
11	2	2	1	X	V	I	I	*	12
12	2	3	1	X	V	I	I	*	13
13	2	3	1	X	V	I	I	*	11
11	2	3	1	X	V	I	I	*	8
8	2	3	0	X	V	I	I	*	9
9	2	3	0	X	V	I	I	*	—

Tabela 2

Numer czynności wykonywanej	Zawartości miejsc po wykonaniu kolejnej czynności							Numer następnej czynności	
	j	z	y	x [1]	x [2]	x [3]	x [4]		x [5]
1	1	4	0	V	I	I	I	I	2
2	1	4	0	V	I	I	I	I	10
10	1	1	0	V	I	I	I	I	11
11	1	1	0	V	I	I	I	I	12
12	1	2	0	V	I	I	I	I	13
13	1	2	0	V	I	I	I	I	11
11	1	2	0	V	I	I	I	I	12
12	1	3	0	V	I	I	I	I	13
13	1	3	0	V	I	I	I	I	11
11	1	3	0	V	I	I	I	I	12
12	1	4	0	V	I	I	I	I	13
13	1	4	0	V	I	I	I	I	14
14	1	4	0	V	I	I	I	I	15
15	5	4	0	V	I	I	I	I	20
20	5	4	0	V	I	I	I	I	6
6	5	4	1	V	I	I	I	I	7
7	5	4	1	V	I	I	I	I	—

CZY ZIEMIA MOŻE PODSKOCZYĆ ALBO CO SIĘ RUSZA W ZEGARKU



Na pewno pamiętacie z lekcji fizyki na temat trzeciej zasady dynamiki Newtona następujące opowiadanie: „Jeśli ktoś podskoczy, to taka sama siła, jak ta, która wypchnęła go w górę, działa na Ziemię w dół, a zatem i ona się poruszy”. Oczywiście, ponieważ Ziemia ma masę $6 \cdot 10^{24}$ kg, a człowiek kilkadziesiąt, nie proponuję Wam, żebyście taki ruch zarejestrowali, jest on na to zbyt mały. Istnieje jednak zagadnienie dość podobne do powyższego, a mianowicie:

CO SIĘ RUSZA W ZEGARKU?

— Balans, czyli małe kółko poruszające się tam i z powrotem głównie pod wpływem siły sprężystości spiralnej sprężynki, tzw. włosa — powiecie od razu. A co jeszcze? Na pewno kółka zębate, jedne szybciej, inne wolniej. A co jeszcze? Nie wiecie? Cały zegarek, oczywiście jeżeli mu pozwolić. Podobnie jak człowiek odpycha się od Ziemi podskakując, tak balans odpycha się od zegarka i cały zegarek obraca się, za każdym razem w przeciwną stronę. Obraca się bardzo mało, ale przy odpowiedniej metodzie będziemy mogli ten ruch zaobserwować i zmierzyć. Spróbujmy więc odpowiedzieć na pytanie:

JAK WYKRYĆ RUCH ZEGARKA?

Przede wszystkim trzeba wziąć zegarek. Najwygodniejszy będzie budzik. Musimy teraz pozwolić mu się ruszać. W tym celu zawiesimy go na nitkach, jak na rysunku. Na trzech, bo na jednej kręciłby się ciągle i nic byśmy nie zobaczyli, a na dwóch mógłby ustawić się ukośnie do płaszczyzny poziomej. Przyglądając się zegarkowi nawet bardzo dokładnie, trudno zauważyć jakikolwiek ruch z częstością jego tykania (z taką częstością porusza się balans). Dla wykrycia jego ruchu dorobimy zegarkowi długą, kilkumetrową wskazówkę z... promienia świetlnego. Jest to metoda stosowana w konstrukcji galvanometrów zwierciadlanych służących do pomiarów bardzo małych prądów. Do zegarka przymocujemy pionowo małe lustro, jak na rysunku (może być kawałek rozbitego) i oświetlimy je latarką kieszonkową. Obserwując odbitą plamkę świetlną na ścianie (w pokoju nie może być zbyt jasno) można zauważyć, że wykonuje ona drgania, i zmierzyć ich amplitudę. W ten sposób zaobserwowaliśmy „odrzut” zegarka wywołany ruchem balansu. Spróbujmy jednak być fizykami. Kiedy fizyk zaobserwuje jakiejś zjawisko, zwykle zadaje sobie pytanie:

JAKICH INFORMACJI NAM ONO DOSTARCZA?

Ruch, który widzieliśmy, jest ilustracją zasady zachowania momentu pędu. Mówi ona, że moment pędu J , równy iloczynowi momentu bezwładności I przez prędkość kątową ω , jest wielkością stałą:

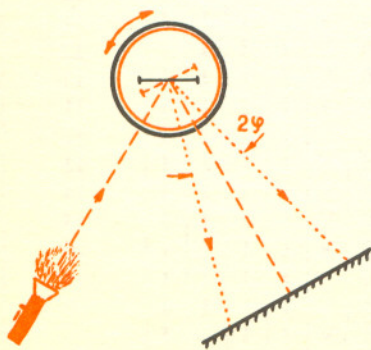
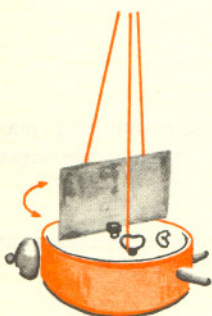
$$J = I\omega = \text{const}$$

pod warunkiem, że na układ nie działają siły zewnętrzne lub działają takie siły, których całkowity moment równa się zero. Nasz układ składa się z balansu (o momencie bezwładności I_B i prędkości kątowej ω_B) i reszty zegarka (o momencie bezwładności I_Z i prędkości kątowej ω_Z). Jeżeli układ jako całość ma spoczywać, jego moment pędu musi równać się zero:

$$J = I_B\omega_B + I_Z\omega_Z = 0.$$

Wynika stąd, że prędkości kątowe balansu i zegarka mają przeciwne znaki i są odwrotnie proporcjonalne do momentów bezwładności:

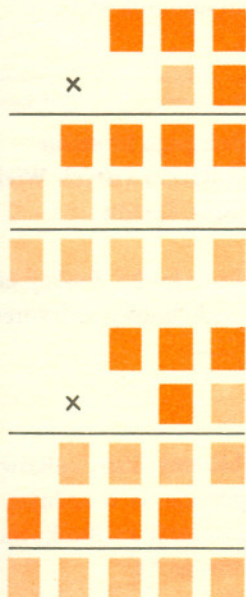
$$\frac{\omega_B}{\omega_Z} = -\frac{I_Z}{I_B}.$$





Rozwiązanie zadania M11.

Ustalmy, jakie liczby spełniające warunki zadania mogą występować w zaznaczonych fragmentach mnożenia: (Widzimy, że w obu przypadkach mamy do rozstrzygnięcia ten sam problem).



Można sprawdzić, że zadanie to ma cztery rozwiązania:

$$(*) \quad 775 \cdot 3 = 2325, \quad 555 \cdot 5 = 2775, \\ 755 \cdot 5 = 3775, \quad 325 \cdot 7 = 2275.$$

(Warto pomyśleć, jak to sprawdzić rozpatrując możliwie mało przypadków). Zastanówmy się teraz, czy dwucyfrowy mnożnik w naszym zadaniu może być zapisany dwiema różnymi cyframi? Otóż nie! Spójrzmy na równości (*): cóż bowiem przyjęlibyśmy wtedy jako mnożną?

W rezultacie pozostały nam do sprawdzenia cztery przypadki, które otrzymaliśmy z równości (*) i łatwo stwierdzamy, że **jedynym** rozwiązaniem naszego zadania jest

$$\begin{array}{r} 775 \\ \times 33 \\ \hline 2325 \\ 2275 \\ \hline 25575 \end{array}$$

W ruchu drgającym taki sam będzie stosunek kątów wychyleń balansu i zegarka:

$$\frac{\varphi_B}{\varphi_Z} = - \frac{I_Z}{I_B}.$$

Zakładając więc, że amplituda wahań balansu jest rzędu jednego radiana, możemy oszacować stosunek momentów bezwładności na podstawie zmierzonej amplitudy wahań zegarka pamiętając, że kąt obrotu „wskazówki” świetlnej jest dwukrotnie większy od kąta obrotu zwierciadełka.

Okazuje się, że obliczony stosunek momentów bezwładności może nam się jeszcze przydać, analizując bowiem ruch układu możemy na podstawie obliczeń przewidzieć

NOWE ZJAWISKO

Polega ono na tym, że zegarek swobodnie zawieszony „chodzi” szybciej niż nieruchomo zamocowany.

Jak wiadomo, w ruchu harmonicznym okres drgań wynosi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{k}},$$

gdzie I jest momentem bezwładności, a k współczynnikiem sprężystości sprężyny, tj. stosunkiem momentu siły do wychylenia kąтового. W przypadku ruchu względnego dwóch części można wykazać, że efektywny moment bezwładności występujący w powyższym równaniu wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2},$$

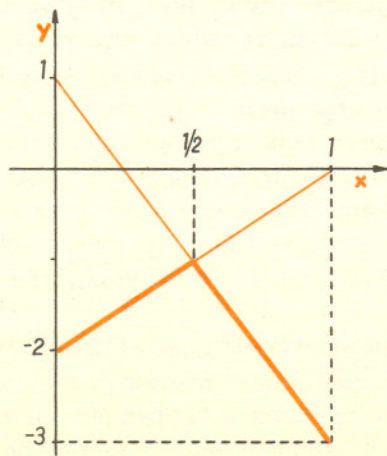
czyli w naszym przypadku:

$$I = \frac{I_B I_Z}{I_B + I_Z}.$$

Oczywiście dla zegarka nieruchomego liczy się tylko moment bezwładności balansu. Jeżeli przeprowadzić rachunek (spróbujcie), to okaże się, że różnica wskazań zegarka swobodnego i nieruchomego Δt po czasie t spełnia przybliżoną równość

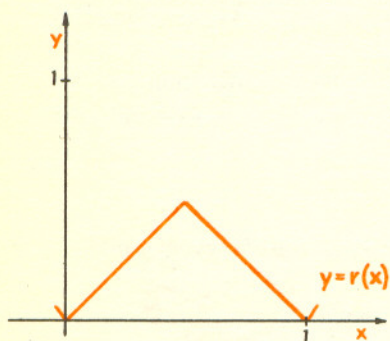
$$\frac{\Delta t}{t} \approx \frac{1}{2} \frac{I_B}{I_Z}$$

(podczas rachunków pamiętamy, że $I_B \ll I_Z$; korzystamy też z przybliżenia $(1+x)^a \approx 1+ax$, słusznego dla $x \ll 1$). Zastanówcie się, czy w warunkach Waszego doświadczenia da się tę różnicę zmierzyć, a jeśli tak — spróbujcie. Jak zwykle, czekam na listy z opisem Waszych doświadczeń. A może sami macie pomysły ciekawych eksperymentów do wykonania w domu? Napiszcie! Adres redakcji — na wewnętrznej stronie okładki.

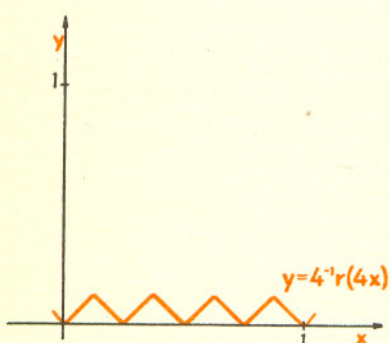


Rozwiązanie — Gry

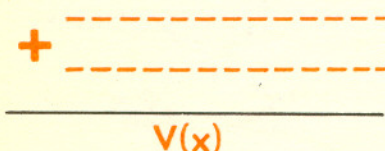
Zad. 1. Jeśli N zastosuje strategię $(y, 1-y)$, to znaczy wykorzysta strategię T w stopniu y , a strategię TU — w stopniu $1-y$, to grając przeciwko tu może on oczekiwać rezultatu $y \cdot 0 + (1-y) \cdot (-2) = 2y - 2$, a przeciwko t — rezultatu $y \cdot (-3) + (1-y) \cdot 1 = 1 - 4y$. Mniejsza z tych wartości jest największa dla $y_0 = 1/2$ i wynosi -1 . Strategią optymalną jest $(1/2, 1/2)$.



Rys. 1



Rys. 2



Rysunek 1 przedstawia wykres funkcji $y = r(x)$, czyli składnik szeregu, definiującego funkcję $V(x)$, odpowiadający $n = 0$. Rysunek 2 przedstawia wykres funkcji $y = 4^{-1}r(4x)$, czyli składnik tego szeregu, odpowiadający $n = 1$. Ogólnie, wykres $(n+1)$ -ego wyrazu tego szeregu, otrzymuje się z wykresu n -tego wyrazu tego szeregu w taki sam sposób, w jaki wykres na rysunku 2 otrzymano z wykresu na rysunku 1, tzn. przez czterokrotne zmniejszenie w kierunku pionowym i czterokrotne zagęszczenie w kierunku poziomym.

Mówimy, że podzbiór Z zbioru liczb rzeczywistych jest miary zero, jeśli dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taki skończony lub nieskończony ciąg przedziałów

$$(a_1; b_1), (a_2; b_2), (a_3; b_3), \dots$$

że spełnione są następujące warunki:

1) Ciąg ten pokrywa zbiór Z , tzn. dla dowolnej liczby x ze zbioru Z istnieje liczba naturalna n taka, że x należy do przedziału $(a_n; b_n)$.

2) Łączna suma długości tych przedziałów jest mniejsza od ϵ , czyli

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) + \dots < \epsilon.$$

Dnia 1 kwietnia odbył się w Warszawie wszechświatowy zjazd Stowarzyszenia Ciągłych Funkcji Rzeczywistych Zmiennej Rzeczywistej (w skrócie **SCFRZR**), poświęcony palącym zagadnieniom teorii różniczkowalności. Zjazd obradował w Przestrzeni Funkcji Mierzalnych przy Wydziale Pierwszej Pochodnej Uniwersytetu Matematyki. Przewodniczyła Funkcja Identycznościowa I , zdefiniowana wzorem

$$I(x) = x$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Sekretarzowały Funkcje Stałe. W zjeździe wzięły udział delegacje bratnich stowarzyszeń Funkcji Mierzalnych oraz Ciągłych Funkcji Rzeczywistych Wielu Zmiennych, a także Organizacji Funkcji Nieciągłych. Koszty Zjazdu zostały pokryte z Funduszu Wyobraźni Matematycznej.

W dyskusji nad aktualnymi zagadnieniami teorii różniczkowalności funkcji ciągłych jako pierwsza zabrała głos Funkcja van der Waerdena V , zdefiniowana wzorem

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} r(4^n x),$$

gdzie $r(x)$ oznacza odległość liczby rzeczywistej x od najbliższej liczby całkowitej. Funkcja V z ubolewaniem przyznała się, że nie posiada pochodnej w żadnym punkcie. W gorących słowach scharakteryzowała trudną sytuację rachunkową ciągłych funkcji nigdzie nie różniczkowalnych. Zwróciła uwagę na niebezpieczeństwo istnienia takich funkcji w obecnej dobie komputeryzacji. Zlecenie komputerowi obliczenia pochodnej funkcji nigdzie nie różniczkowalnej może doprowadzić do zniszczenia komputera, który jest przecież kosztownym przyrządem.

Następnie zabrała głos Funkcja Weierstrassa W , zdefiniowana wzorem

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos k^n x,$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą, k jest nieparzystą liczbą naturalną oraz

$$0 < a < 1 \quad \text{i} \quad ak \geq 6.$$

Oświadczyła ona, że również nie posiada pochodnej w żadnym punkcie, a sytuacja jej jest jeszcze gorsza niż Funkcji van der Waerdena. Poszczególne składniki szeregu definiującego funkcję V mają kształt piły, której zęby maleją i równocześnie zagęszczają się, gdy n dąży do nieskończoności. W punktach kątowych piły pochodna oczywiście nie istnieje. Można jakoś pogodzić się z faktem, że wskutek takiej zębatej konstrukcji w sumie otrzymuje się coś bardzo chropowatego, co — wskutek zagęszczania osobliwości — w każdym punkcie jest pozbawione stycznej. Zupełnie inna jest sytuacja Funkcji Weierstrassa W , jest ona bowiem określona szybko zbieżnym szeregiem, którego wyrazy są pomnożonymi przez stałe funkcjami trygonometrycznymi, a więc funkcjami o wyśmienitych własnościach różniczkowych. Z pozoru wydaje się, że funkcja W musi być nie mniej gładka i pozbawiona chropowatości jak funkcje trygonometryczne. Niestety, rzeczywistość przeczy przypuszczeniom opartym na intuicji. Z zewnątrz funkcja W wydaje się piękna, lecz wewnątrz jest odrażająca, po prostu próchno. Wystarczy spróbować zróżniczkować ją wyraz za wyrazem — od razu rozpada się na poszczególne składniki, tzn. szereg staje się rozbieżny.

Delegatka ze Stowarzyszenia Funkcji Mierzalnych zwróciła uwagę, że sytuacja jest również fatalna, jeśli zawęzić rozważania do funkcji różniczkowalnych prawie wszędzie, to znaczy w każdym punkcie z wyjątkiem bardzo małego zbioru punktów, tzw. zbioru miary zero. Takie funkcje nie są nawet wyznaczone

Ważne w tej definicji jest to, że liczba ϵ może być dowolnie mała, tzn. dowolnie bliska zeru.

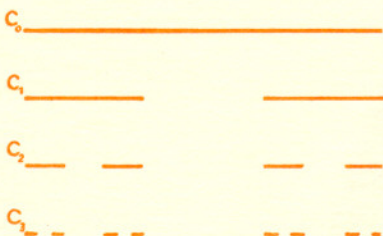
Na przykład każdy zbiór skończony jest miarę zero. Ogólniej: każdy zbiór przeliczalny

$$Z = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

(tzn. zbiór, którego wszystkie elementy można ponumerować kolejnymi liczbami naturalnymi) ma miarę zero. Aby się o tym przekonać, należy przyjąć dla danej liczby $\epsilon > 0$

$$a_n = x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, \quad b_n = x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}.$$

Istnieją zbiory nieprzeliczalnej miary zero. Żaden przedział nie jest zbiorem miary zero.



Rys. 3

Zbiór Cantora C jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych x postaci

$$(1) \quad x = \frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \frac{2a_3}{3^3} + \dots,$$

gdzie $a_n = 0$ lub 1 dla każdego n . Jeszcze inaczej może być określony jako część wspólna zbiorów C_0, C_1, C_2, \dots , zdefiniowanych indukcyjnie jak następuje: C_0 jest odcinkiem $\langle 0; 1 \rangle$. Zbiór C_n jest sumą 2^n rozłącznych przedziałów

domkniętych o długości $\frac{1}{3^n}$ każdy. Dzieliąc

każdy z tych odcinków na trzy części o równej długości i usuwając z każdego z nich środkowy otwarty przedział otrzymujemy 2^{n+1} przedziałów domkniętych, których sumą jest C_{n+1} . Rysunek 3 podaje konstrukcję

zbiorów C_0, C_1, C_2, C_3 . Usuwane przedziały otwarte noszą nazwę przedziałów przyległych do zbioru Cantora.

Zbiór Cantora jest przykładem nieprzeliczalnego zbioru miary zero.

z dokładnością do stałej przez swoje pochodne. Za przykład może służyć Funkcja C Cantora, tzn. jedyna funkcja ciągła C na odcinku $\langle 0; 1 \rangle$, spełniająca następujące tożsamości:

$$C\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} C(x), \quad C\left(\frac{1}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad C\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} C(x)$$

dla każdego x z tego przedziału. Funkcja ta jest ciągła, niemalejąca, różna od stałej, bo $C(0) = 0$ i $C(1) = 1$, a pochodna jej jest prawie wszędzie równa zeru, mianowicie wszędzie, z wyjątkiem punktów zbioru Cantora, który jest zbiorem miary zero. Obecna na sali obrad Funkcja Cantora szczerze przyznała się

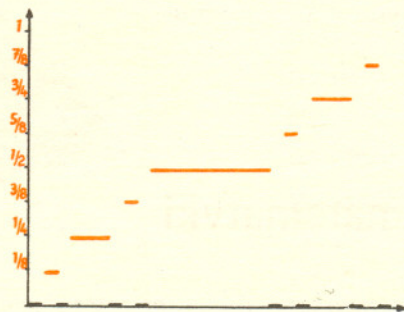
Funkcję Cantora $C(x)$ można inaczej zdefiniować jak następuje. Jeśli x należy do zbioru Cantora C , tzn. jest postaci (1), to

$$(2) \quad C(x) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots$$

Jeśli $(a; b)$ jest przedziałem przyległym do C , to a i b należą do C , liczby $C(a)$ i $C(b)$ są więc zdefiniowane wzorem (2). Dowodzi się, że $C(a) = C(b)$. Przyjmujemy

$$(3) \quad C(x) = C(a) = C(b) \quad \text{dla każdego } x \text{ z przedziału } (a; b).$$

Ponieważ każdy punkt przedziału $\langle 0; 1 \rangle$ albo należy do C , albo należy do dokładnie jednego przedziału przyległego do C , wzory (2) i (3) definiują funkcję C na całym przedziale. Z (3) wynika, że funkcja C jest stała na każdym przedziale przyległym do C . Rysunek 4 pokazuje, jak wygląda wykres funkcji C na przedziałach przyległych do C_3

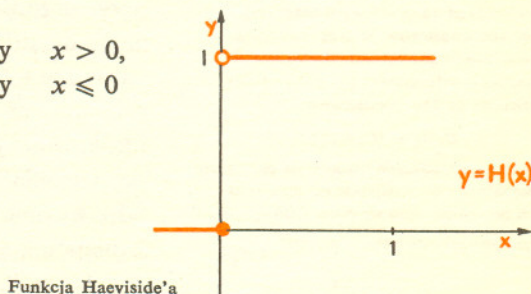


Rys. 4

do swych wad, w szczególności do symulowania funkcji stałej przy różniczkowaniu.

Delegatka Organizacji Funkcji Nieciągłych, Funkcja Heaviside'a H , zdefiniowana wzorem

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x > 0, \\ 0, & \text{gdy } x \leq 0 \end{cases}$$



Funkcja Heaviside'a

wyraziła pogląd, że równie katastrofalna jest sytuacja w dziedzinie najprostszych funkcji nieciągłych. Ona sama ma wprawdzie pochodną równą zeru w każdym punkcie $x \neq 0$, ale marzy o tym, by mieć pochodną pierwszego rzędu określoną wszędzie. Niestety przy próbach różniczkowania w punkcie 0 czuje silny ból dążący tak szybko do $+\infty$, że musi je przerwać i pogodzić się z losem. Delegatka Stowarzyszenia Ciągłych Funkcji Rzeczywistych Wielu Zmiennych poruszyła trudności związane z wielokrotnym różniczkowaniem. Dla funkcji jednej zmiennej jest jeszcze jako tako: jeśli funkcja f ma zdefiniowaną pochodną rzędu m , to ma także dobrze określone i ciągłe wszystkie pochodne mniejszych rzędów. Inaczej jest w dziedzinie funkcji dwu zmiennych. Rozważmy na przykład funkcję

$$U(x, y) = F(x) + F(y),$$

gdzie $F \in SCFRZR$ jest jakąkolwiek funkcją nie mającą pochodnej w żadnym punkcie. Jeśli różniczkować funkcję U tylko raz, ze względu na jedną ze zmiennych x lub y , różniczkowanie nie jest wykonalne. Natomiast wszystko wskazuje na to, że za wynik różniczkowania dwukrotnego, raz ze względu na jedną zmienną, a potem ze względu na pozostałą zmienną, należy uznać funkcję równą tożsamościowo zeru!



Rozwiązanie zadania M12.

Takimi sześcioma punktami są wierzchołki pięciokąta foremnego i jego środek (to znaczy środek okręgu opisanego na nim). Jeżeli jeden z wierzchołków trójkąta leży w środku pięciokąta, to dwa boki trójkąta są równe promieniowi okręgu opisanego na pięciokącie, jeżeli zaś każdy wierzchołek trójkąta jest wierzchołkiem pięciokąta, to jest oczywiste, że trójkąt jest równoramienny.

Uwaga: Czytelnik zechce się zastanowić, czy istnieje na płaszczyźnie siedem punktów o tej własności.

Inni mówcy wskazali na niebezpieczeństwo istnienia w *SCFRZR* tak licznych funkcji bez pochodnej w żadnym punkcie. Zbiór tych złych funkcji jest gęsty w Stowarzyszeniu: dla każdej funkcji $f \in \text{SCFRZR}$ i dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka funkcja $g \in \text{SCFRZR}$ nigdzie nie różniczkowalna, że

$$|f-g| < \varepsilon.$$

Funkcje bez pochodnej w żadnym punkcie dosłownie oblepiają wszystkie inne funkcje, nawet te o pięknych tradycjach różniczkowych, jak funkcje różniczkowalne nieskończenie wiele razy i — jeszcze lepsze od nich — funkcje analityczne. Dobre funkcje zarażają się od funkcji nigdzie nie różniczkowalnych ich złymi manierami. Tak wielka liczebność tych funkcji może doprowadzić do inflacji w przestrzeni funkcji ciągłych. W wyniku dyskusji postanowiono rozpisac konkurs na taką reformę teorii różniczkowości, by każda funkcja $f \in \text{SCFRZR}$ miała pochodne wszystkich rzędów. Koszty reformy pokryje Fundusz Wyobraźni Matematycznej.

R.S.

$|f-g|$ = kres górny zbioru liczb postaci $|f(x)-g(x)|$, gdzie x należy do dziedziny funkcji f i g .

Aktualności podstaw matematyki



Rozwiązanie zadania F4.

Po zamknięciu klucza K będzie płynął w obwodzie prąd do chwili wyrównania się napięć kondensatorów. W tym momencie ładunek znajdujący się początkowo w pierwszym kondensatorze ($q_0 = C_1 \cdot U_0$), rozdzieli się na dwa kondensatory:

$$C_1 U_0 = (C_1 + C_2) U,$$

gdzie U_0 — początkowe napięcie na pierwszym kondensatorze, U — napięcie na kondensatorach po wyrównaniu się potencjałów.

Energia początkowa układu wynosi:

$$E_0 = \frac{C_1 U_0^2}{2},$$

energia końcowa układu wynosi:

$$E = \frac{(C_1 + C_2) U^2}{2} = \frac{C_1^2 U_0^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii, ilość ciepła, jaka wydzieli się na oporniku podczas całego procesu wyrównywania się napięć, będzie równa:

$$Q = E_0 - E = \frac{1}{2} \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} U_0^2.$$

Zgodnie z warunkami zadania

$$Q = \frac{1}{2} E_0, \quad \text{zatem} \quad C_1 = C_2.$$

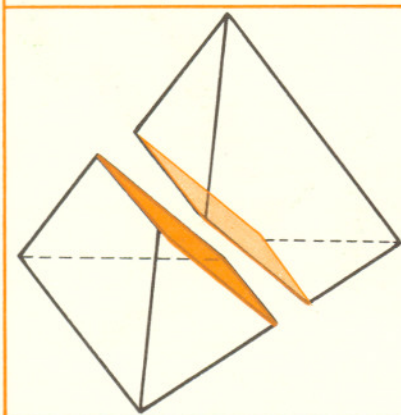
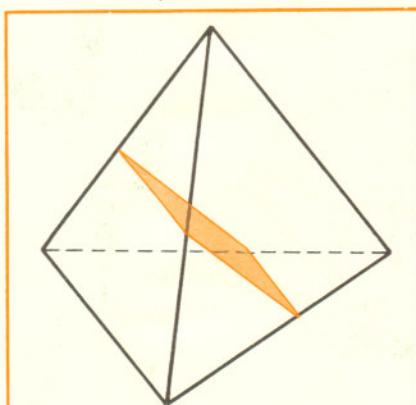
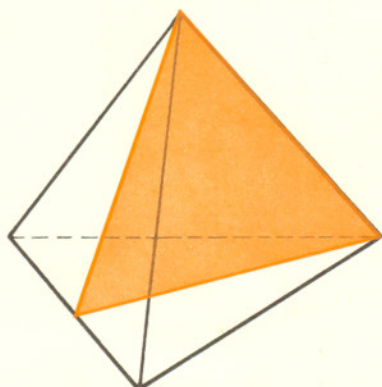
Ilość ciepła wydzielona na oporniku R nie zależy od jego oporu. Jeżeli $C_1 = C_2$, warunki zadania są spełnione przy dowolnej wartości R . Kondensatory produkcji przemysłowej oznaczane są symbolami barwnymi, różnymi dla różnych wartości pojemności. Kondensatory o jednakowych pojemnościach będą oznaczone tymi samymi kolorami. Pierwsze pytanie zadania pozostaje więc bez odpowiedzi, na drugie odpowiedź jest jednoznaczna.

Celem tego artykułu jest przedstawienie głównych kierunków rozwoju podstaw matematyki, głównie teorii mnogości. Obiektami tej teorii w ujęciu von Neumanna są klasy, wśród których wyróżnia się klasy właściwe oraz zbiory. Podejście to, jakkolwiek stanowiące postęp w stosunku do klasycznej teorii Zermelo-Fraenkla, jest obecnie niewystarczające. Współcześnie przyjmuje się istnienie różnego rodzaju przynależności do zbioru. Podstawowym pojęciem jest tu przynależność częściowa, tzw. „słabe bycie elementem” czy też „fragmentaryczne należenie do zbioru”. Pojęcie to opiera się, jak łatwo zauważyć, o bardzo naturalne intuicje. Przykładowo: w wielu organizacjach obserwujemy podział członków na aktywnych i ideowych z jednej strony, a biernych i konformistycznych z drugiej. Ci pierwsi reprezentują tradycyjnie rozumiane pojęcie należenia, podczas gdy drudzy — właśnie słabe. Oczywiście intuicje te są odpowiednio uściślone i zaksjomatyzowane. Przytoczmy podstawowy pewnik: Istnieją takie x, A, B , że $x \notin A$ i $x \notin B$ i $x \in A \cup B$, czyli x nie jest elementem ani A , ani B , natomiast jest elementem sumy tych zbiorów. Staje się on bardziej zrozumiały po wprowadzeniu pojęcia zbioru pustawego, mianowicie: A jest pustawy, gdy każdy element należy do niego co najwyżej fragmentarycznie. Przynależność fragmentaryczną zapisuje się symbolicznie: $x \in_r A$ (z angielskiego *feeble* \in — słabo należy). Przytoczony aksjomat mówi zatem, że istnieją zbiory pustawe, których suma nie jest pustawa. Sytuacja taka, intuicyjnie biorąc, zdarza się wtedy, kiedy x nie należy wprawdzie ani do A , ani do B , lecz należy fragmentarycznie do obu tych zbiorów w taki sposób, że jedna jego część leży w zbiorze A , druga w B , a obie razem stanowią już cały element x . Symbolem $\text{Op}(A)$ oznaczamy zbiór elementów częściowo należących do A , tzw. zbiór elementów oportunistycznych względem A . Badania wykazały, że elementy zbioru są na ogół oportunistyczne, dokładniejsze jednak zrozumienie tego faktu wymaga znajomości systemów logicznych odmiennych od logiki dwuwartościowej. Systemy te przeżywają obecnie bujny rozkwit. Wspomnieć tu należy przede wszystkim o pracy I. A. Trieszczynina *Some results of zerovalues logics* — podstawowej monografii z dziedziny logiki zerowartościowej (tzw. bezwartościowej). W wielu ośrodkach trwają badania nad ujemnowartościowymi logikami. Zadaniem przyszłości jest stworzenie syntetycznej teorii, sumującej osiągnięcia wymienionych kierunków.

P.T.



Złośliwy czworościan



Dla ułatwienia wykonania modelu podajemy tu jego siatkę. Można ją przerysować albo po prostu wyciąć i następnie skleić model.

Zastanówmy się nad takim prostym problemem: iloma sposobami można przeciąć płaszczyzną czworościan foremny na dwie przystające części? Pierwszym oczywistym sposobem jest podział czworościanu jego płaszczyzną symetrii.

Aby otrzymać drugi sposób, weźmy środki czterech krawędzi tak dobranych, aby żadne trzy nie miały wspólnego końca.

Czytelnik z przyjemnością udowodni, że środki te leżą na jednej płaszczyźnie i że ta właśnie płaszczyzna spełnia warunki zadania. I to już wszystko. Więcej sposobów, istotnie różniących się od przytoczonych, nie ma. Ten fakt również pozostawiamy

Czytelnikowi do sprawdzenia. Proponujemy zabawę: zajmijmy się drugim sposobem i wykonajmy modele dwu części powstałych z przeciętego czworościanu.

Jeśli teraz poprosimy kogoś, kto nie zna omawianego zadania, aby z tych dwu części złożył czworościan foremny, okaże się wbrew pozorom, że dla wielu osób rozwiązanie nie będzie oczywiste.

J.B.