delta

SPIS TREŚCI

W następnym numerze:

Najnowsze odkrycia w matematyce i fizyce

„Delta"
matematyczno-fizyczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Polskiego Towarzystwa Fizycznego wydawany przy poparciu Polskiej Akademii Nauk oraz Ministerstwa Oświaty i Wychowania

Komitet Redakcyjny
prof. dr G. Białkowski
doc. dr A. Blikle
prof. dr A. Hrynkiewicz
doc. dr B. Iwaszkiewicz
prof. dr J. Janik
doc. dr J. Jatczak
prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący
prof. dr Z. Krygowska
prof. dr K. Leibler
mgr W. Łucznik
mgr A. Mąkowski
prof. dr A. Pełczyński
prof. dr Arkadiusz Piekara — wiceprzewodniczący
prof. dr J. Rayski
prof. dr W. Rubinowicz
prof. dr A. Schinzel
prof. dr Z. Semadeni
prof. dr M. Subotowicz
dr A. Wakulicz
doc. dr W. Zawadowski

Redaguje Kolegium w składzie:
mgr J. Bednarczuk — sekr. red.
T. Deskur — red. techn.
doc. dr T. Hofmokl — z-ca red. nacz.
dr M. Kordos — red. nacz.
dr Z. Płochocki
opracowanie graficzne
art. graf. K. Dobrowolski

Adres Redakcji
ul. Śniadeckich 8,
00-656 Warszawa, PTM

Zakład Narodowy im. Ossolińskich — Wydawnictwo.
Wrocław, Oddział w Warszawie
Nakład 30000 egz. Objętość 2 ark. wyd.; 2,50 ark. druk.;
papier offsetowy III kl., 80g, 61 × 86
Wydrukowano w Drukarni im. Rewolucji Październikowej,
Warszawa, ul. Mińska 65.
Nr zam. 1744/73 W-122

WARUNKI PRENUMERATY Cena prenumeraty rocznej zł 60,— cena prenumeraty półrocznej zł 30,—

instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę w miastach wojewódzkich i powiatowych, zamawiać mogą prenumeratę wyłącznie za pośrednictwem miejscowych oddziałów i delegatur RSW-Prasa-Książka-Ruch, w terminie do dnia 25 listopada na rok następny.

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły — mające siedzibę na wsi lub miejscowościach, w których nie ma oddziałów RSW-Prasa-Książka-Ruch, winny opłacać prenumeratę w terenowo właściwych urzędach pocztowych.

Prenumeratę krajową dla czytelników indywidualnych przyjmują urzędy pocztowe, listonosze i Centrala Kolportażu RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, konto PKO 1-6-100020 w terminie do dnia 10 miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW-Prasa-Książka-Ruch, 00-840 Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Sprzedaż numerów bieżących i uprzednich

Instytucje państwowe i społeczne, zakłady pracy, szkoły i czytelnicy indywidualni mogą nabywać „DELTĘ"

w Księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN
Sprzedaż gotówkowa i wysyłkowa, pojedyńczych numerów i w kontynuacji; płatność gotówką, przelewem lub za zaliczeniem pocztowym.
Adres: ORPAN 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, konto PKO nr 1-6-100312

w Księgarni Ossolineum, Rynek 8, 50-106 Wrocław

w Głównej Księgarni Naukowej, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

w Księgarni Naukowej, ul. Podwale 6, 31-118 Kraków

Cena 1 egzemplarza zł 5,— nr indeksu 35723

Urojony sprzymierzeniec

Dr Maciej SKWARCZYŃSKI

Wszyscy wiemy, że w zbiorze liczb rzeczywistych są wykonalne wszystkie cztery działania arytmetyczne. Niestety już prosty przykład

(1) $$x^2+1=0$$

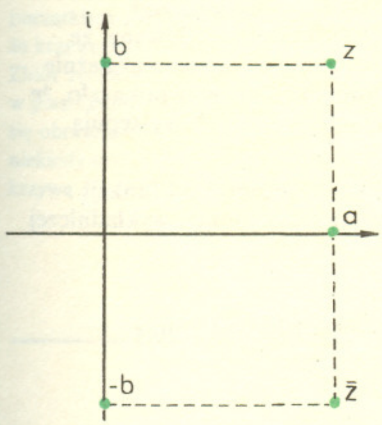
pokazuje, że równanie o współczynnikach rzeczywistych może nie mieć rzeczywistego pierwiastka. Nieprzyjemna sytuacja. Nie jest w końcu miło być posądzonym o nieumiejętność rozwiązania tak prosto wyglądającego równania. Nic więc dziwnego, że już w szesnastym wieku matematycy wprowadzili do rozważań nowy idealny obiekt, oznaczany symbolem i, uważany za rozwiązanie równania (1).

Przy wykonywaniu działań arytmetycznych postępowano z nim tak, jak ze znanymi liczbami, pamiętając jedynie że $i^2=-1$. W wyniku otrzymywano liczby postaci $a+bi$, gdzie $a, b \in R$, zwane zespolonymi, oraz wzory

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,$$
$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Liczby postaci bi nazywano urojonymi, gdyż mimo wszystko istnienie liczb, których kwadrat byłby liczbą ujemną, nadal budziło wątpliwości.

Musiały minąć trzy stulecia, zanim Karol Gauss rozproszył te wątpliwości, interpretując liczbę zespoloną $z=a+bi$ jako punkt na płaszczyźnie o współrzędnych a, b. Odcięta a nazywa się częścią rzeczywistą, a rzędna b nazywa się częścią urojoną liczby z. Stąd też zbiór liczb zespolonych został nazwany płaszczyzną Gaussa.



Liczba $\bar{z}$, symetryczna do z względem osi rzeczywistej, nazywa się sprzężoną do z. Oczywiście $\bar{z}=a-bi$. Ciekawą własnością sprzężenia jest to, że wynik działania arytmetycznego na liczbach sprzężonych z z_1, z_2 jest zawsze liczbą sprzężoną do wyniku tego działania na liczbach z_1, z_2. Jeśli z_0 jest pierwiastkiem równania o rzeczywistych współczynnikach

(2) $$a_nz^n+\ldots+a_0=0,$$

to biorąc sprzężenie obu stron widzimy, że $\bar{z}_0$ jest również pierwiastkiem tego równania.

Odległość liczby z od zera na płaszczyźnie Gaussa jest oznaczana przez $|z|$ i nazywa się wartością bezwzględną liczby z. Oczywiście

$$|z|^2=a^2+b^2, \quad \text{a więc} \quad |z|^2=z\bar{z}.$$

Równość $|z_1||z_2|=|z_1z_2|$ wynika łatwo z drugiego z tych związków, jeśli ją zapisać w równoważnej postaci

$$|z_1|^2|z_2|^2=|z_1z_2|^2.$$

Uwzględniając powyższy związek, otrzymujemy tożsamość, w której występują już tylko liczby rzeczywiste:

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2.$$

Oto do czego przydała się urojona liczba i. Otrzymaliśmy elegancki dowód twierdzenia o liczbach jak najbardziej naturalnych: iloczyn dwu liczb naturalnych, będących sumami kwadratów liczb naturalnych, jest liczbą, która jest również sumą kwadratów liczb naturalnych.

Zobaczmy, w czym jeszcze może pomóc urojony sprzymierzeniec.

Zauważmy najpierw, że pojęcie granicy ciągu może być rozszerzone na przypadek, gdy wyrazy ciągu są liczbami zespolonymi. Liczba zespolona z nazywa się granicą ciągu $\{z_n\}$, $n=0, 1, \ldots$, jeżeli ciąg, którego n-tym wyrazem jest odległość z_n od z na płaszczyźnie Gaussa, dąży do zera przy n dążącym do nieskończoności. Podobnie jak w przypadku rzeczywistym, definiujemy sumę szeregu o wyrazach z_n jako granicę ciągu sum częściowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(z_0+z_1+\ldots+z_n).$$

Jeśli granica ta istnieje, to mówimy, że szereg jest zbieżny.
Funkcje trygonometryczne $\sin x$, $\cos x$ mogą być przedstawione szeregiem potęgowym o wyrazach rzeczywistych, zbieżnym dla każdego $x \in R$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Własność tę ma również funkcja wykładnicza. Jeśli za podstawę przyjąć liczbę rzeczywistą

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots \approx 2{,}73,$$

to dla każdego $x \in R$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Można udowodnić, że każdy z tych szeregów pozostaje zbieżny, gdy zamiast x podstawi się dowolną liczbę zespoloną z. W szczególności

$$e^{it} = 1+\frac{it}{1!}+\frac{i^2t^2}{2!}+\frac{i^3t^3}{3!}+\ldots = 1+\frac{it}{1!}-\frac{t^2}{2!}-\frac{it^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{it^5}{5!}-\ldots =$$

$$= \left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots\right).$$

Otrzymaliśmy wzór Eulera:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t.$$

Tak więc między funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznymi zachodzi niezmiernie ciekawy związek. Jest to tym bardziej nieoczekiwane, że funkcja wykładnicza była definiowana w programie algebry zupełnie niezależnie od funkcji trygonometrycznych. Dopiero wprowadzenie urojonego i pokazało, że funkcja wykładnicza może być pożyteczna w zadaniach, w których występują funkcje trygonometryczne, i na odwrót.

Spróbujmy na przykład wyrazić funkcje $\cos nt$, $\sin nt$ w zależności od funkcji $\cos t$, $\sin t$. Naszym punktem wyjścia będzie podstawowa dla funkcji wykładniczej tożsamość

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2},$$

która, tak jak w przypadku rzeczywistym, wynika z przedstawienia oraz własności szeregów.

Z tożsamości tej wynika natychmiast wzór $e^{nz} = (e^z)^n$.
W szczególności

$$e^{int} = (e^{it})^n.$$

Stąd również wobec wzoru Eulera otrzymujemy wzór de Moivre'a

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt.$$

Stosując do lewej strony wzór Newtona i porównując części rzeczywiste i urojone obu stron otrzymujemy tożsamości

$$\cos nt = \cos^n t - \binom{n}{2}\cos^{n-2}t\cdot\sin^2 t + \binom{n}{4}\cos^{n-4}t\cdot\sin^4 t - \ldots,$$

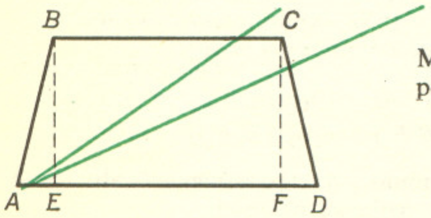
$$\sin nt = \binom{n}{1}\cos^{n-1}t\cdot\sin t - \binom{n}{3}\cos^{n-3}t\cdot\sin^3 t + \ldots.$$

Na przykład dla $n = 4$ mamy:

$$\cos 4t = \cos^4 t - 6\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$$

$$\sin 4t = 4\cos^3 t\cdot\sin t - 4\cos t\cdot\sin^3 t.$$

W tożsamościach tych nie występują liczby zespolone.
Urojony sprzymierzeniec po spełnieniu swej roli zniknął, pozostawiając gotowy wynik.



Rozwiązanie zadania M8
Z warunków zadania mamy (zob. rysunek) $AD = 8$ cm, $BC = 4$ cm. Niech BE i CF będą wysokościami trapezu. Ze wzoru na pole trapezu znajdujemy $BE = 3{,}5$ cm. Trójkąty ABE i DCF są przystające, więc $AE = FD$, i ponieważ $AE+FD = AD-BC = 4$ cm, więc $AE = 2$ cm. Wówczas $AB =$

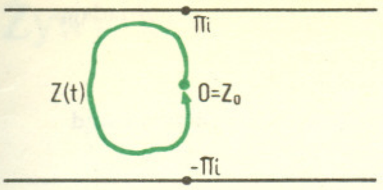
$$= \sqrt{AE^2+BE^2} =$$

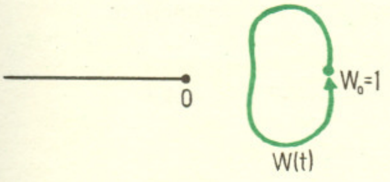
$$= \sqrt{2^2+3{,}5^2}\ \text{cm} = \frac{\sqrt{65}}{2}\ \text{cm}.$$

Musimy teraz rozstrzygnąć, które z położeń, zaznaczonych na rysunku liniami przerywanymi zajmuje dwusieczna kąta BAD. W tym celu zbadajmy, który z kątów BAC i CAD jest większy. Ponieważ kąty CAD i BCA są równe, mamy porównać kąty BAC i BCA. Są to kąty trójkąta ABC, a w trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok. Mamy więc porównać boki BC i AB. Mają one długości 4 cm i $\frac{\sqrt{65}}{2}$ cm.

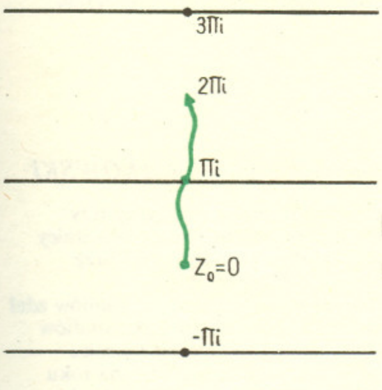
Mamy oczywiście $4 < \frac{1}{2}\sqrt{65}$,

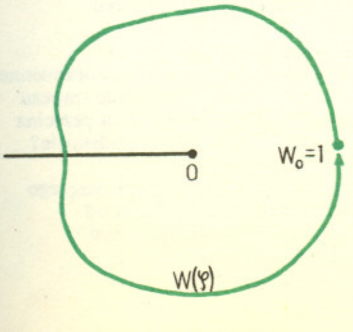
skąd $BC < AB$ i kąt BAC jest mniejszy od kąta BCA, a więc kąt BAC jest mniejszy od kąta CAD; dwusieczna kąta BAD przecina więc bok CD.





Krzywa jest to ciągła funkcja $z(t) = x(t)+iy(t)$, określona w domkniętym przedziale $I = \langle a, b\rangle$. Nietrudno przekonać się, że funkcja $z(t)$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy ciągłe są obie funkcje rzeczywiste $x(t)$, $y(t)$. Jeśli koniec $z(b)$ krzywej pokrywa się z jej początkiem $z(a)$, to mówimy, że krzywa jest zamknięta. Zbiór $z(I)$ zawarty w płaszczyźnie Gaussa nazywa się obrazem krzywej i jest niekiedy mylony z samą krzywą $z(t)$, $t \in I$.





Z kolei spróbujmy obliczyć sumę:

$$C_n = 1+\cos t+\cos 2t+ \dots +\cos nt.$$

Zadanie wydaje się trudne ..., ale od czego liczba i?
Liczby zespolone:

$$1, \cos t+i\sin t,\ \cos 2t+i\sin 2t,\ \dots,\ \cos nt+i\sin nt$$

tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \cos t+i\sin t$.
Istotnie, zgodnie ze wzorem de Moivre'a, mamy

$$(\cos kt+i\sin kt)(\cos t+i\sin t) = e^{ikt}\cdot e^{it} = e^{i(k+1)t} = \cos(k+1)t+i\sin(k+1)t.$$

Oznaczając

$$S_n = \sin t+\sin 2t+ \dots +\sin nt$$

i korzystając ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego, otrzymujemy dla $q \neq 1$

$$C_n+iS_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\cos\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} + i\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone otrzymujemy szukany wzór na C_n oraz dodatkowo wzór na S_n. Tym razem nasz sprzymierzeniec nie tylko pomógł rozwiązać zadanie, ale jeszcze zostawił prezent. Zamiast jednego mamy dwa wzory:

$$1+\cos t+\cos 2t+ \dots +\cos nt = \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\cos\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}},$$

$$\sin t+\sin 2t+ \dots +\sin nt = \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Przyjrzyjmy się teraz geometrycznym własnościom funkcji e^z. Zauważmy, że $2\pi i$ jest okresem tej funkcji. Rzeczywiście,

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi+i\sin 2\pi = 1+0i = 1, \quad \text{więc} \quad e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Podzielmy płaszczyznę zmiennej $z = s+ti$ na pasy prostymi $t = 2k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \dots$. Funkcja e^z przekształca pas $0 < t < 2\pi$ (i każdy z pozostałych pasów) wzajemnie jednoznacznie na płaszczyznę z usuniętą półprostą dodatnią $w \geqslant 0$.

W podobny sposób dzieląc płaszczyznę zmiennej $z = s+ti$ na pasy prostymi $t = \pi+2k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \dots$, przekonujemy się, że funkcja e^z przekształca każdy z tych pasów wzajemnie jednoznacznie na płaszczyznę z usuniętą półprostą ujemną $w \leqslant 0$.
Tak więc obrazem płaszczyzny Gaussa przy przekształceniu $w = e^z$ jest płaszczyzna Gaussa z usuniętym punktem 0. W szczególności dla każdego $w_0 \neq 0$ istnieje liczba z_0 taka, że $e^{z_0} = w_0$. Co więcej, jeśli $w(t)$ jest krzywą o początku w punkcie w_0, nie przechodzącą przez 0, to istnieje dokładnie jedna krzywa $z(t)$ o początku w punkcie z_0 taka, że $e^{z(t)} = w(t)$ dla każdego t. Jeżeli krzywa $w(t)$ nie przecina półprostej dodatniej (lub półprostej ujemnej), to krzywa $z(t)$ cała zawiera się w tym pasie, do którego należy z_0, i jest zamknięta, jeżeli krzywa $w(t)$ jest zamknięta. Tak jest w przypadku przedstawionym na górnym rysunku. Na ogół jednak koniec krzywej $z(t)$ jest różny od z_0. Gdy np. $w(t) = r\cdot e^{it}$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, to $z(t) = z_0+it$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, nie jest krzywą zamkniętą.
Liczba z_0, taka, że $e^{z_0} = w_0$ nazywa się logarytmem liczby w_0. Część urojona t_0 liczby z_0 nazywa się argumentem liczby w_0. Stąd też różnica między końcem krzywej $z(t)$ a jej początkiem nazywa się przyrostem logarytmu na krzywej $w(t)$. Przyrost argumentu na krzywej $w(t)$ definiujemy jako część urojoną przyrostu logarytmu. W ostatnim przykładzie przyrost logarytmu wynosił $2\pi i$, a przyrost argumentu wynosił 2π. W przypadku ogólnym przyrost logarytmu jest równy $2k\pi i$, a przyrost argumentu jest równy $2k\pi$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Liczba k nie zależy od początku z_0 krzywej $z(t)$ (dlaczego?) i nazywa się indeksem ind $w(t)$ krzywej zamkniętej $w(t)$. Wskazuje ona, ile razy krzywa $w(t)$ „obiega" punkt 0.

Niech $w_1(t)$, $w_2(t)$ będą dwiema krzywymi zamkniętymi, którym odpowiadają krzywe $z_1(t)$ i $z_2(t)$. Równość

$$e^{z_1(t)+z_2(t)} = e^{z_1(t)}e^{z_2(t)} = w_1(t)w_2(t)$$

pokazuje, że krzywej $w_1(t)w_2(t)$ odpowiada krzywa $z_1(t)+z_2(t)$. Wynika stąd następna bardzo ważna własność indeksu:

$$\operatorname{ind}(w_1(t)w_2(t)) = \operatorname{ind} w_1(t) + \operatorname{ind} w_2(t).$$

Drugą własność indeksu zaobserwowaliśmy już wcześniej. Mianowicie, jeśli zamknięta krzywa $w(t)$ nie przecina półprostej dodatniej (lub ujemnej), to

$$\operatorname{ind} w(t) = 0.$$

Zobaczymy teraz, w jaki sposób z tych dwu własności indeksu wynika następujące

podstawowe twierdzenie algebry:

Każdy wielomian

(2) $$W(z) = a_n z^n + \ldots + a_0, \quad n > 0, \quad a_n \neq 0$$

o współczynnikach zespolonych posiada zespolony pierwiastek.

Będziemy rozumować nie wprost. Przypuśćmy, że wielomian W nie posiada pierwiastka. Wynika stąd, że krzywa $W(re^{it})$, gdzie $r \geqslant 0$, zaś $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, nie przechodzi przez 0, a więc posiada określony indeks. Indeks ten zmienia się w sposób ciągły wraz z r, a będąc zawsze liczbą całkowitą musi mieć tę samą wartość dla każdego r. Dla $r = 0$ krzywa $W(re^{it})$ redukuje się do stałej, a więc indeks ma wartość zero.

Tymczasem pisząc $W = W_1 W_2$, gdzie $W_1 = z^n$, $W_2 = a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}$ stwierdzamy, że dla dużych r indeks ma wartość n. Rzeczywiście, dla dużych wartości bezwzględnych zmiennej z, wartości W_2 mało różnią się od a_n i wobec tego nie należą do półprostej dodatniej lub nie należą do półprostej ujemnej. Stąd, dla dużych r, $\operatorname{ind} W_2(re^{it}) = 0$. Ale $\operatorname{ind} W_1(re^{it}) = n \operatorname{ind} re^{it} = n$. Zatem

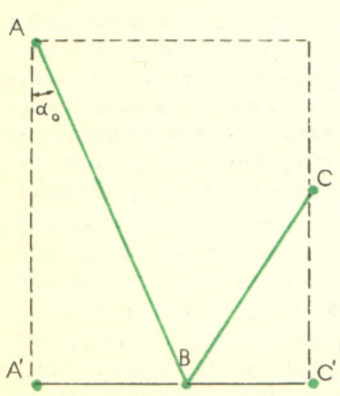
$$\operatorname{ind} W(re^{it}) = n + 0 = n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkiem $n > 0$, a więc dowód został zakończony.

Raz jeszcze urojone i sprawiło niespodziankę, i to niespodziankę dużego kalibru. Powołane do istnienia wyłącznie w związku z kłopotami z rozwiązaniem prościutkiego równania (1), odwdzięczyło się w sposób przewyższający wszelkie oczekiwania. Równanie (2) może nie mieć pierwiastka rzeczywistego, ale na pewno posiada pierwiastek postaci $a+bi$. Przyznacie, że takiego sprzymierzeńca można nawet polubić. A może warto nawet ... poznać go trochę lepiej.

Zadania

redaguje dr Jędrzej JĘDRZEJEWSKI



F3. Do wykonania dziennych zadań pozostało listonoszowi doręczenie jednej przesyłki do któregoś z domów przy ulicy $A'C'$. Ulica ta biegnie wzdłuż placu, w którego narożniku (punkt A) znajduje się urząd wydający przesyłki. W punkcie C placu przy ulicy CC', biegnącej prostopadle do $A'C'$ i także wzdłuż tego samego placu, znajduje się urząd C, do którego listonosz musiał dostarczyć pokwitowanie odbioru przesyłki. Listonosz wybrał sobie adresata (punkt B) w taki sposób, żeby przebyć trasę ABC w najkrótszym czasie. Ciężar niesionej paczki obniża prędkość marszu listonosza n = trzykrotnie w stosunku do prędkości marszu z listem lub bez paczki. Czy przesyłką była paczka, czy list, jeżeli wiadomo, że kierunek wybranej przez niego drogi (odcinek AB) tworzy z ulicą $A'A$ kąt $\alpha_0 = 30°$? Zakładamy ponadto, że listonosz do i od adresata porusza się po prostych i ruchem jednostajnym.
Rozwiązanie na str. 13

redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

W niniejszym numerze podajemy trzy zadania, które mieli rozwiązać uczestnicy Zaocznej Szkoły Matematycznej przy Uniwersytecie Moskiewskim.

M7. Student w ciągu pięciu lat studiów zdał 31 egzaminów. Na każdym roku studiów zdawał więcej egzaminów niż na roku poprzednim. Liczba egzaminów na roku piątym była trzy razy większa od liczby egzaminów na roku pierwszym. Ile egzaminów zdawał student na roku czwartym?
Rozwiązanie na str. 14.

M8. Równoległe boki trapezu równoramiennego mają długości 4 cm i 8 cm, pole trapezu wynosi 21 cm^2. Który bok trapezu przecina dwusieczna kąta przy większej podstawie?
Rozwiązanie na str. 2.

M9. Czy suma odległości punktu leżącego wewnątrz czworokąta wypukłego od każdego jego wierzchołka może być większa od jego obwodu?
Rozwiązanie na str. 15.

Żywy komputer

$$\sqrt[19]{2\,354894\,349429\,457622\,021534\,797578\,016216\,759632\,416955\,888372\,812582\,086540\,647846\,651879\,974024\,937257\,412166\,152931\,109264\,267899\,792807\,507132\,426007} = 9\,267143$$

Była godzina 9.^{35}, gdy Wim Klein odwrócił się do tablicy. Przez całą jej szerokość widniała stutrzydziestotrzycyfrowa liczba. Zadanie polegało na obliczeniu pierwiastka dziewiętnastego stopnia z tej liczby. Na sali zebrało się ponad dwieście osób, zapadła cisza. O godzinie 9.^{40} Klein napisał na tablicy wynik: liczbę siedmiocyfrową 9267143, zastrzegając się, że nie jest to jeszcze odpowiedź ostateczna — podany wynik musi jeszcze sprawdzić. W trzy minuty później Wim Klein oświadczył, że zgodnie z jego obliczeniami wynik jest dobry. Wynik był rzeczywiście poprawny.

Opisana scena rozegrała się latem 1973 roku, w dużym audytorium Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych Cern pod Genewą w Szwajcarii. Wim Klein jest pracownikiem laboratorium od początków jego istnienia i został zaangażowany do pracy w czasie, gdy nie dysponowano jeszcze żadnym komputerem. Odznacza się on niebywałą pamięcią i bardzo rzadką zdolnością wykonywania w pamięci długich i złożonych obliczeń numerycznych. Podjął on wyzwanie rzucone przez matematyka meksykańskiego, który potrafił obliczyć w pamięci pierwiastek dziewiętnastego stopnia ze stutrzydziestotrzycyfrowej liczby w czasie trzydziestu minut. Klein podjął się pobić ten rekord.

Poczyniono staranne przygotowania. Na sali umieszczono końcówkę dużej maszyny cyfrowej i wybraną przez audytorium siedmiocyfrową liczbę podniesiono do dziewiętnastej potęgi. Aby wykluczyć wszelkie podejrzenie o porozumienie z pomocnikami, zastosowano specjalne środki ostrożności. Wybór siedmiocyfrowej liczby przeprowadzono, rozdając w sposób przypadkowy sześć kartek wśród obecnych na sali widzów. Każdy, kto wylosował kartkę, miał swojego kontrolera i w jego obecności miał napisać jedną cyfrę, przy czym wiedział, która to będzie kolejna cyfra liczby. Pierwsza cyfra była znana i musiała to być dziewiątka, tak aby dziewiętnasta potęga wybranej liczby była liczbą 133-cyfrową. Pozostałe cyfry były znane tylko wylosowanym parom uczestników, tak że nie było na sali nikogo, kto znałby całą liczbę siedmiocyfrową. Cyfry te przekazano do komputera. Każda para uczestników przekazała swoją cyfrę; tak więc tylko komputer znał wszystkie siedem cyfr. Po ich uzyskaniu podniósł liczbę do dziewiętnastej potęgi i wynik przekazał na salę. Wynik ten został zapisany na tablicy i sprawdzony (zajęło to pięć minut). Wtedy poproszono Wima Kleina o przystąpienie do zadania. Dopiero po zakończeniu rozwiązywania porównano wynik z cyframi na zebranych kartkach i z zawartością pamięci maszyny cyfrowej — wynik był rzeczywiście poprawny. Redakcja «Delty» sprawdziła to przy pomocy komputera.

T.H.

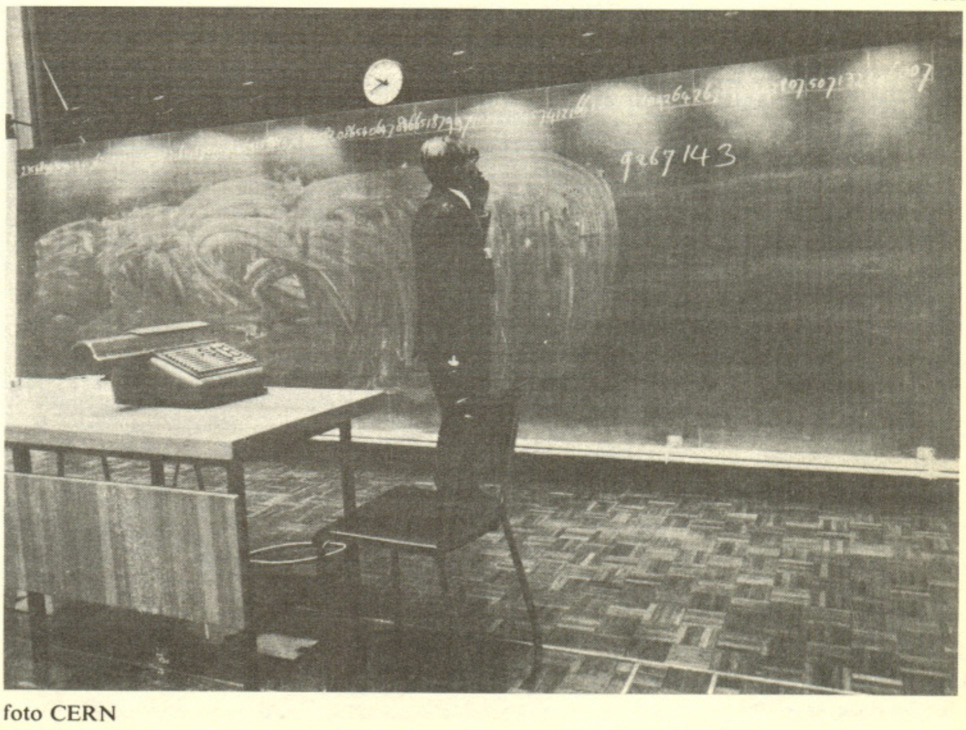
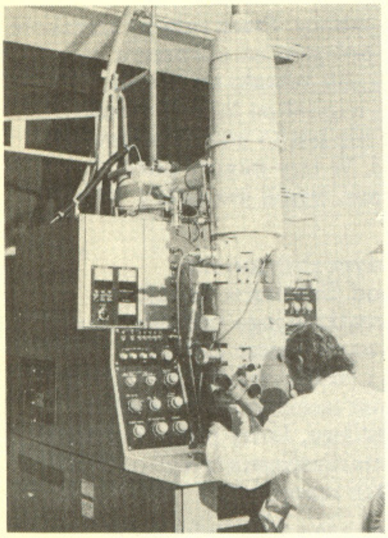


foto CERN

«Delta» z wizytą w Instytucie Fizyki PAN



Mikroskop elektronowy o powiększeniu 140 000 razy i zdolności rozdzielczej poniżej 5 Å umożliwia widzenie układu poszczególnych warstw atomowych kryształu

Instytut Fizyki PAN jest największą placówką naukową Polskiej Akademii Nauk. Jest to zarazem instytut stosunkowo młody, który w ubiegłym roku (1973) obchodził dwudziestolecie swego istnienia. Zasadnicza tematyka badawcza IF PAN dotyczy fizyki ciała stałego, w tym głównie materiałów półprzewodnikowych i nowoczesnych magnetyków. Dwadzieścia lat dla nauki, to okres zdawałoby się stosunkowo krótki. Dla fizyki półprzewodników i magnetyków dwadzieścia lat to niemal cała historia. Właśnie w tym okresie dokonały się naukowe odkrycia odsłaniające wagę i wielorakość naukowych problemów tkwiących w półprzewodzących i magnetycznych kryształach. W parze z osiągnięciami fizyki przyszły fascynujące zastosowania techniczne, określające kolejne rewolucje w elektronice i komputeryzacji, przesuwające niezawodność, miniaturyzację i szybkość działania niemal poza granice wyobraźni.

Prace prowadzone w Instytucie Fizyki mają charakter badań podstawowych. Ich celem jest dalszy postęp w ujawnianiu i zrozumieniu zjawisk zachodzących w kryształach. Jednakże znaczenie badanych materiałów sprawia, że nawet prace z natury czysto naukowe prowadzą do styku z interesującymi zastosowaniami. Wśród dwu tysięcy prac naukowych zrealizowanych w Instytucie Fizyki, obok znakomitej, liczącej się na świecie fizyki, znaleźć można prace, które doprowadziły bezpośrednio do wniosków patentowych. Właśnie to połączenie wytrawnej fizyki z ważną dla gospodarki problematyką jest zasadniczym punktem polityki naukowej Instytutu.

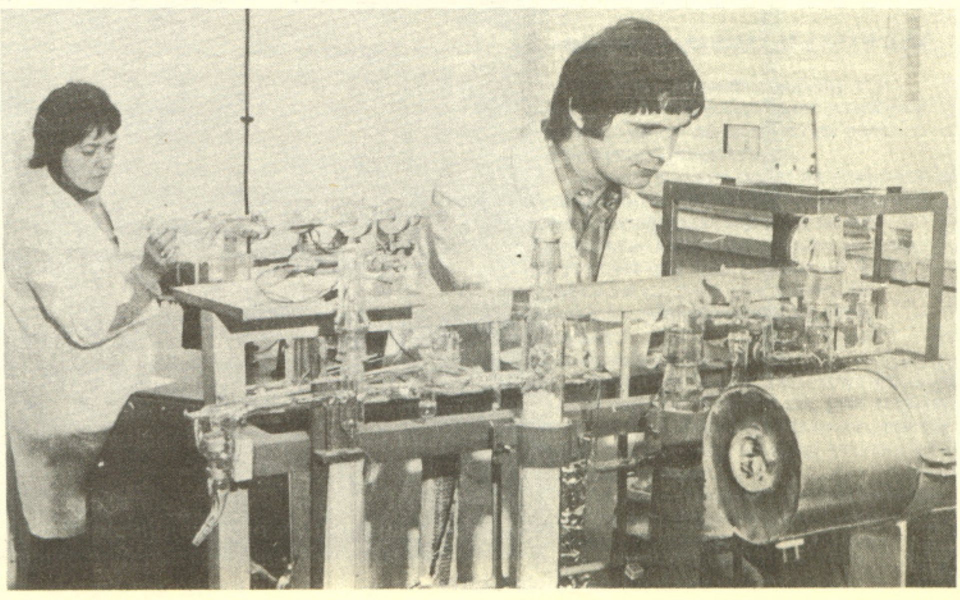
Służewiec to jedna z odleglejszych dzielnic Warszawy, warto jednak tam się udać, aby znaleźć się w Instytucie Fizyki PAN lub, inaczej — w centrum polskiej fizyki ciała stałego.

W laboratoriach naukowych dominują ludzie młodzi. Średnia wieku pracowników naukowych przypada poniżej trzydziestu lat, a kilkudziesięciu doktorantów to ludzie poniżej lat 25. Ta właśnie „młodzież" zasiada przy unikalnej, wysublimowanej aparaturze, umożliwiającej rozwiązywanie zagadek wnętrza kryształu. Struktura wewnętrzna materiałów magnetycznych, informacje o polu krystalicznym stanowią problemy kluczowej wagi dla rozumienia i wykorzystania zjawisk zachodzących w magnetykach. Jedną z efektywnych metod badawczych uruchomionych w Instytucie Fizyki stanowią pomiary jądrowego rezonansu magnetycznego.

Zaburzenia struktury krystalicznej ciał stałych odgrywają szczególnie istotną rolę w kształtowaniu fizycznych własności kryształów. Mikroskop elektronowy o napięciu 200 tys. *woltów* i powiększaniu 140 tys. razy uwidocznia układ poszczególnych płaszczyzn atomowych kryształu, umożliwia określanie odstępstw od regularności układu oraz wnioskowanie o zaburzeniach struktury krystalicznej — to znaczy defektach strukturalnych.

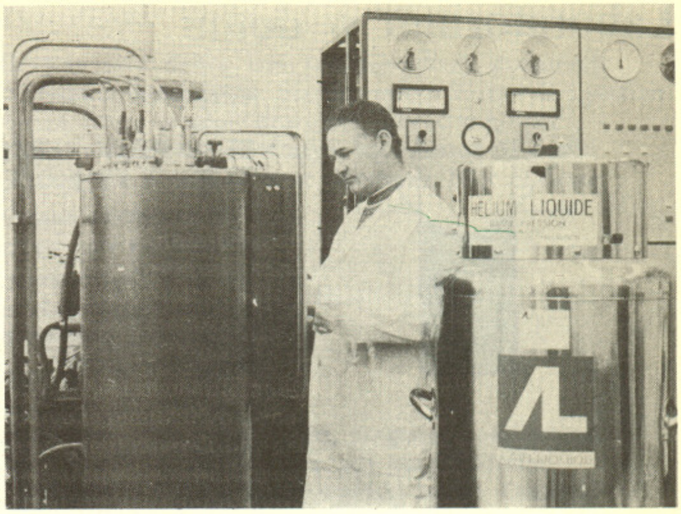
Zbudowany w Instytucie Fizyki, czterometrowej długości laser molekularny CO_2 stanowi interesujące narzędzie do badania zjawisk wyzwalanych w półprzewodnikach silnym promieniowaniem elektromagnetycznym. Między innymi, przy użyciu tego lasera, zaobserwowano po raz pierwszy na świecie zjawisko optycznego mieszania częstości w potrójnych związkach półprzewodnikowych. Był to sukces nie tylko zdolnych eksperymentatorów, ale i fizyków-teoretyków, którzy opracowali w Instytucie Fizyki teorię optycznych zjawisk nieliniowych w półprzewodnikach.

Instytut Fizyki PAN słynie na arenie światowej z badań tzw. półprzewodników z wąską przerwą energetyczną. Związane z tymi badaniami prace technologiczne nad wytwarzaniem



Technologia związków półprzewodnikowych wymaga precyzyjnej aparatury i bardzo dużej czystości

Aparatura do pomiaru jądrowego rezonansu magnetycznego, przy pomocy której uzyskuje się informacje o wewnętrznej strukturze materiałów magnetycznych



Skraplarka pracująca w Instytucie Fizyki PAN dostarcza ciekłego helu dla potrzeb szeregu warszawskich ośrodków naukowych

monokryształów półprzewodnikowych wymagają niezwykle precyzyjnej aparatury i wysokiej czystości mierzonej stopniem zanieczyszczenia niższym od jednej milionowej.

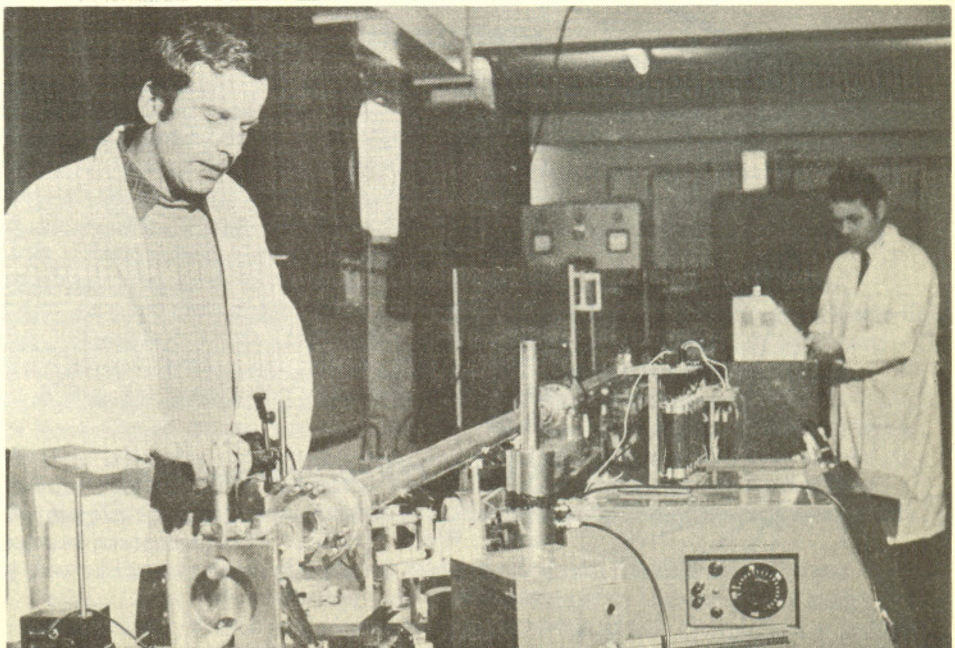
Opracowania fizyków-technologów z Instytutu Fizyki PAN stanowią przedmiot zazdrości nawet takich potęg naukowych, jak Związek Radziecki czy Stany Zjednoczone.

W fizyce dnia dzisiejszego szczególny nacisk położony jest na badania tzw. stanów ekstremalnych — zjawisk zachodzących w niskich temperaturach, wysokich ciśnieniach i silnych polach elektrycznych i magnetycznych.

W Laboratorium Badań Kriogenicznych Instytutu Fizyki uzyskano w Polsce temperaturę 0,3*K*. Laboratorium to jest równocześnie producentem i dostawcą ciekłego helu dla szeregu warszawskich ośrodków naukowych. Wykonane w Instytucie Fizyki urządzenia wysokociśnieniowe umożliwiają prowadzenie badań zjawisk zachodzących w ciśnieniach kilkunastu tysięcy atmosfer.

Przy pomocy magnesów nadprzewodzących prowadzone są badania zjawisk kwantowych w polach magnetycznych o natężeniu do 10 *tesli* (100 tys. *gausów*). Opracowana w Instytucie aparatura umożliwia badania w impulsowych polach magnetycznych do 40 *tesli*. Są to jedynie fragmentaryczne ilustracje z laboratoriów Instytutu Fizyki. Podobne przykłady można by mnożyć, wystawiając świadectwo różnorodności i bogactwa fizyki ciała stałego oraz nieustającego wysiłku badawczego polskich fizyków w kierunku wyjaśnienia zjawisk zachodzących w kryształach.

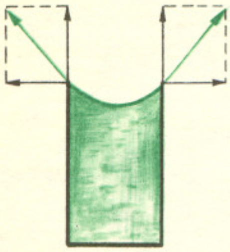
Łag



Czterometrowej długości laser molekularny CO_2 stanowi interesujące narzędzie do badań zjawisk zachodzących w półprzewodnikach pod działaniem silnego promieniowania elektromagnetycznego

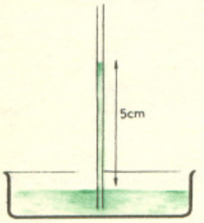
Laboratorium w domu

redaguje dr Jan GAJ



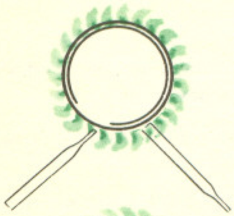
BUDUJEMY *PERPETUUM MOBILE* ALBO: I TY MOŻESZ ZOSTAĆ ORNITOLOGIEM

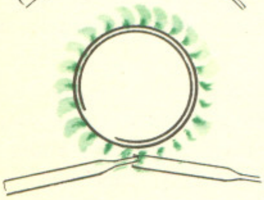
Tym razem nie damy się nabrać! — powiecie. *Perpetuum mobile*, czyli urządzenie poruszające się i wykonujące pracę bez dopływu energii z zewnątrz, nie istnieje. Jesteśmy zbyt pewni zasady zachowania energii, żeby poważnie zastanowić się nad możliwością skonstruowania czegoś takiego. No trudno, macie rację. Urządzenie, którego wykonanie wam proponuję, nie będzie prawdziwym *perpetuum mobile*.

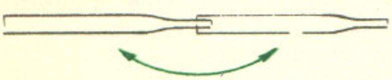


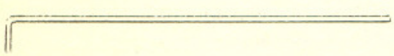
ZASADA DZIAŁANIA

W konstrukcji naszego ptaka pijącego wodę (stąd druga część tytułu) oprzemy się na zjawisku włoskowatości, czyli wciągania cieczy do wąskich rurek wykonanych z materiału zwilżanego przez ciecz. Jak wiemy, powstaje wtedy menisk wklęsły. Na jego obwodzie działają siły napięcia powierzchniowego *P*. Jeżeli zsumujemy te siły, ich składowe poziome zredukują się, a pionowe się dodadzą, tworząc siłę wciągającą ciecz do rurki. Efekt ten jest najwyraźniej widoczny w bardzo cienkich rurkach zwanych kapilarami.





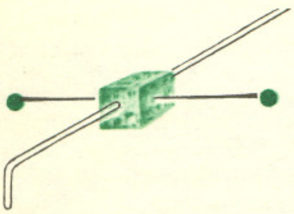




DAJCIE MI KAPILARĘ, A ... ZBUDUJĘ PTAKA

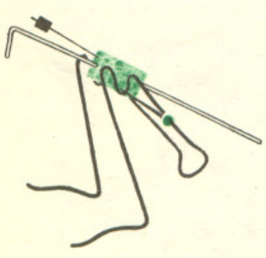
Nie ma tak dobrze! Kapilarę zrobicie sami. Będzie to najtrudniejsza część doświadczenia. Potrzebna będzie do tego rurka szklana oraz płomień gazowy (np. w kuchence domowej czy turystycznej). W razie trudności ze zdobyciem rurki można kupić w aptece kilka zakraplaczy. Rurkę szklaną rozgrzewamy silnie w płomieniu (stale ją obracając), żeby dobrze zmiękła, następnie wyjmujemy ją i szybko rozciągamy w długą nitkę. Jeżeli dysponujemy tylko zakraplaczami, najpierw łączymy ich kilka, aby otrzymać dłuższy odcinek i nie poparzyć rąk. Musimy w tym celu rozgrzać silnie końce dwóch zakraplaczy w płomieniu i połączyć je, a następnie wyprostować. Po połączeniu w ten sposób np. czterech zakraplaczy (po zdjęciu gumek oczywiście!) robimy kapilarę jak z rurki szklanej. Uwaga: szkło wprowadzamy do płomienia powoli, aby nie popękało, i grzejemy stale je obracając. Oczywiście średnica otrzymanej kapilary zależy od tego, jak mocno rozgrzejemy i jak szybko będziemy rozciągać rurkę. W praktyce średnicę najlepiej ocenić badając, jak wysoko podniesie się poziom wody w kapilarze, kiedy ją pionowo zanurzymy. Różnica poziomów powinna wynosić kilka centymetrów.

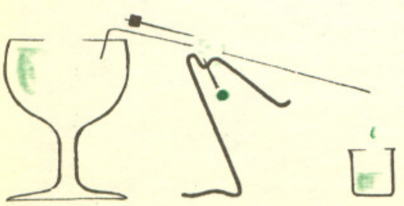
Odłamujemy teraz ok. 15 cm kapilary i wyginamy ją ostrożnie nad płomieniem, tak aby otrzymać mniej więcej kształt pogrzebacza. Uważamy przy tym, aby nie zatopić otworu w kapilarze.



MONTUJEMY PTAKA

Nadziewamy teraz na kapilarę kawałek korka i wbijamy weń szpilkę, która będzie osią obrotu. Zasadnicza część ptaka gotowa. Trzeba jeszcze go wyważyć i zrobić mu nogi z drutu. Jako przeciwwagę dla długiego ogona wbiliśmy w korkowy tułów dodatkową szpilkę z łebkiem obciążonym kulką z plasteliny. Ilość plasteliny dobieramy tak, aby „ptak" pochylił się dziobem w dół. Jeżeli teraz podstawimy mu szklankę z wodą, zacznie on „pić" wodę, która będzie zbierać się w postaci kropli na końcu ogona, wreszcie przeważy go i ogon opadnie w dół; dochodząc do oporu, strąci z siebie kroplę i powróci do poprzedniego położenia. Jeżeli kropla spada z ogona nie przeważając go, należy zmniejszyć ilość plasteliny. Tylna część wykonanej z drutu podstawki („nóg") musi stanowić opór dla ogona, aby nie opadł on zbyt nisko. Jeżeli kropla nie spada po dojściu ogona do oporu, należy ilość plasteliny powiększyć tak, aby dopiero większa kropla była w stanie go przeważyć.





A CO Z *PERPETUUM MOBILE*?

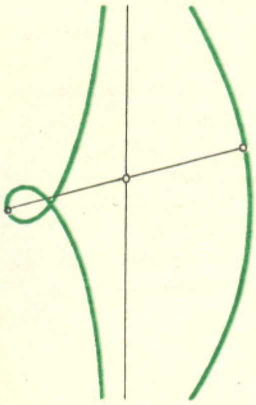
Oczywiście nikt nam nawet przez chwilę nie uwierzy, że jest to *perpetuum mobile*. Woda opadając wykonuje pracę kosztem energii potencjalnej. Możemy jednak nasze urządzenie nieco skomplikować, przymocowując do ogona kawałek gazy lub ligniny (ponownie wyważyć!). Wtedy kropla nie spadnie i ptak pozostanie z opuszczonym ogonem, dopóki woda z niego nie wyparuje. Dla przyśpieszenia parowania możemy przybliżyć do niego lampę.

DOBRZE, A GDZIE TEN PTAK?

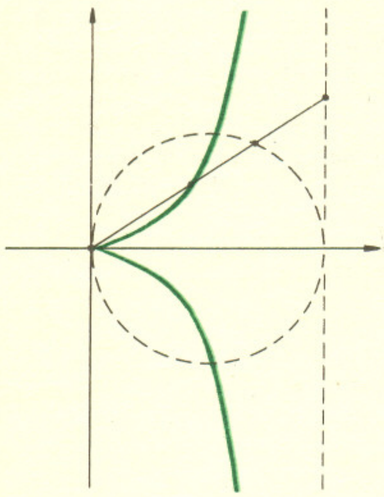
Tylko ci spośród Was, których zasób dobrej woli jest największy, dopatrzyli się ptaka w opisanym urządzeniu. Rzecz jasna, przedstawiłem Wam tylko pewien model fizyczny, rodzaj silnika, który możecie dowolnie ,,ubrać w piórka", nadając mu postać bardziej atrakcyjną czy maskującą jego zasadę działania. Przyślijcie opisy wykonanych przez Was ptaków ze zdjęciami. Najciekawsze opublikujemy.

Jak zlikwidować geometrię?

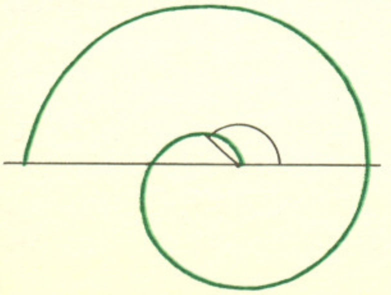
Dr Marek KORDOS



Konchoida Nikomedesa



Cissoida Dioklesa



Spirala Archimedesa

Wydaje się, że można prześladować jakąś dyscyplinę, pragnącą nosić miano nauki, z trzech zasadniczych powodów. Mianowicie, gdy ma przedmiot nieokreślony lub metody podejrzane bądź wreszcie wnioski mętne. Dlatego właśnie nie chcemy uznać za naukę chiromancji, czy też kabalistyki. Historia rodzaju ludzkiego dostarczyła również szeregu przykładów skrupulatnego i energicznego likwidowania tej bądź innej teorii z uwagi na płynące z niej wnioski, uznane przez likwidatorów za fatalne i szkodliwe. Dlatego na przykład starano się unicestwić prace Kopernika czy Darwina. Ostatni jednak z przytoczonych powodów nie cieszy się uznaniem i, co ważniejsze, nie daje na dłuższą metę rezultatów. Tylko, co to wszystko ma wspólnego z geometrią?

KAŻDA Z OSOBNA

Tomasso Campanella, włoski dominikanin, wojujący zresztą z Inkwizycją, żyjący na przełomie XVI i XVII wieku, w swojej powieści utopijnej *Miasto słońca* pisze między innymi, że zbliżający się do tego idealnego miasta podróżnik może na jego murach dostrzec rysunki znacznie większej liczby figur geometrycznych od tej, jaką znają współcześni uczeni. Z dzisiejszego punktu widzenia zdanie takie jest absurdalne. Przecież figur geometrycznych jest nieskończenie wiele, a więc nie można ich wszystkich narysować. A cóż dopiero ,,znacznie więcej". Rzecz jednak w tym, że wówczas, w XVI wieku, zdanie to było sensowne. Wobec nieumiejętności objęcia figur geometrycznych jakąś wspólną teorią, a nawet zdefiniowania pojęcia ,,figura geometryczna", ówcześni geometrzy rozpatrywali każdą z nich z osobna. Figura geometryczna był to oddzielny obiekt, samodzielne indywiduum, pewien fenomen wymagający odrębnego badania. Figurę uważano za daną, jeżeli był znany sposób (ścisły) jej narysowania, metody jej metrycznego opisu (pole, obwód, itp.), słowem — jeżeli można się było nią praktycznie zajmować. Dla łatwiejszego porozumienia się nadawano bardziej skomplikowanym figurom imiona własne, np. konchoida Nikomedesa, cissoida Dioklesa, spirala Archimedesa, ślimak Pascala. A uczony-geometra był tym wybitniejszy, im więcej znał figur.

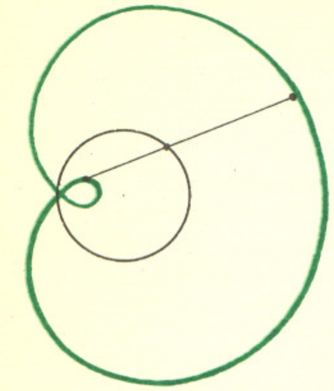
NO TO LIKWIDUJEMY!

Błędem byłoby sądzić, że wśród nauk, na ich siedemnastowiecznym poziomie, geometria była wyjątkowo niechlujna metodologicznie. Wręcz przeciwnie, ciągle jeszcze każdy światły człowiek owych czasów uważał za swój punkt honoru mieć pewne wykształcenie i w tej dziedzinie. Z drugiej strony np. fizyka nie umiała jeszcze opisać ruchu ani kinematycznie, ani dynamicznie, medycyna nie dopracowała się pojęcia układu krwionośnego, chemicy nie rezygnowali z poszukiwań kamienia filozoficznego.

Natomiast dla wielu stało się jasne, że to co się nazywa nauką, w istocie słuszniej byłoby nazwać bałaganem. I dlatego to właśnie siedemnaste stulecie dało początek nowożytnej nauce, dlatego w tym stuleciu we wszystkich właściwie dyscyplinach dokonano, jak to się mówi, milowego kroku naprzód. Jedni precyzowali metodologię i tym samym dokonywali zasadniczych odkryć w konkretnych dyscyplinach wiedzy (np. Newton), inni śmiało ,,chwytali byka za rogi" zajmując się metodologią nauk w pełnej ogólności. Do tych ostatnich należał Francuz René Descartes, szerzej znany pod nazwiskiem Kartezjusza. Poglądy swoje wyłożył w *Rozprawie o metodzie*, proponując system zwany dziś racjonalizmem.

I tu właśnie dostało się geometrii. Poddając surowej krytyce metodologię większości dyscyplin naukowych uważał Kartezjusz za słuszne podać pozytywny przykład skuteczności proponowanych przez siebie zasad. Oczywiście w jednej dyscyplinie. Wybór padł na geometrię. Pomysł zaś metodologiczny polegał na wprowadzeniu układu współrzędnych, przyporządkowaniu za jego pomocą punktom trójek liczb — ich współrzędnych — i sprowadzeniu tym sposobem rozważań geometrycznych do algebry, do rachunku na liczbach — współrzędnych punktów. Geometria uprawiana dotychczasowymi metodami uznana została przez Kartezjusza za zbędną. Wykład nowych metod dołączył do *Rozprawy o metodzie* jako aneks, zatytułowany *Geometria analityczna*. Do dziś nazwa ta oznacza właśnie uprawianie geometrii metodami Kartezjusza, tj. sprowadzenie jej do roli działu algebry.

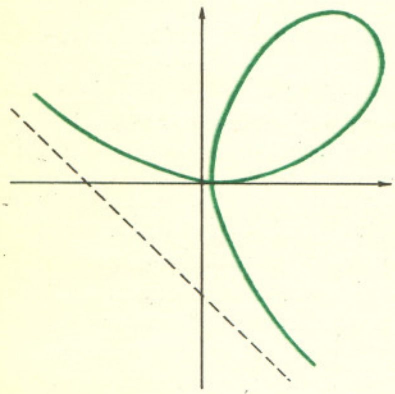
Nie wypada zresztą dziwić się radykalności sformułowań zawartych w *Rozprawie o metodzie* — każdy istotny przewrót niesie ze sobą krańcowe zaprzeczenie dotychczasowego stanu.



Ślimak Pascala

ANIA Z ZIELONEGO WZGÓRZA I INNI

Pomysł Kartezjusza okazał się niesłychanie płodny. Do operowania współrzędnymi punktów wprzęgnięto stworzoną w kilka(!) lat później analizę matematyczną (Newton i Leibniz), uzyskując gałąź matematyki zwaną geometrią różniczkową. Nowoczesna, dwudziestowieczna algebra dała w podobny sposób geometrię algebraiczną. Obie te dziedziny doprowadzono do wysokiej sprawności. Inna rzecz, że i ta „stara" geometria nie legła odłogiem. W czasach pokartezjańskich rozszerzyła nawet swoje królestwo, dołączając do „zwykłych" euklidesowych przestrzeni nieeuklidesową przestrzeń rzutową, przestrzeń Bolyai–Łobaczewskiego, całą rodzinę przestrzeni Riemanna. Dopracowała się solidnych logicznych podstaw (Hilbert) i ustaliła swoje związki z algebrą. Te ostatnie da się ująć krótko w stwierdzeniu, że zarówno pojęcia geometryczne można wymodelować w algebrze, jak i odwrotnie — pojęcia algebraiczne mogą być wymodelowane w geometrii.



Liść Kartezjusza

A jednak... na wyższych uczelniach (na całym świecie) wykłada się obecnie w ramach standardowego kursu tylko geometrię analityczną i jej pochodne. Coraz silniej naciska się na takież ustawienie geometrii w liceach. Poważny autorytet proponował, by geometrii syntetycznej (przeciwieństwo analitycznej) uczyć „tak jak historii sztuki". Niemniej poważny autorytet zadał mi (zresztą publicznie) pytanie: „No dobrze, ale po co się tym zajmować, skoro algebra i tak wystarczy?" Dyskusję nad celowością uprawiania (i nauczania) geometrii znajdą Czytelnicy na łamach «Wiadomości Matematycznych».

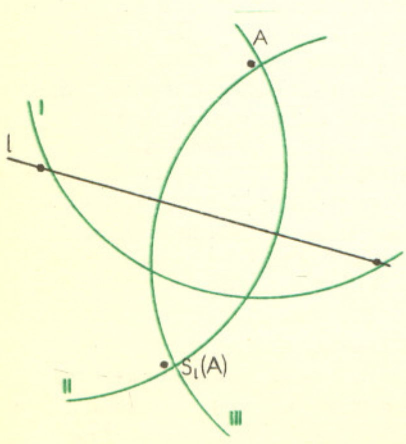
Zmartwieni geometrzy (tym mianowicie, że wymrą) piszą reklamowe wręcz dzieła (np. *Wstęp do geometrii dawnej i nowej* Coxetera — świetna i ciekawa książka dwukrotnie już wydana przez PWN). Ale czy to pomoże? Wszak już Ania z Zielonego Wzgórza stwierdziła, że geometrii nauczyć się nie można. Żarty żartami, bardzo jednak jestem ciekaw, co na ten temat sądzą Czytelnicy «Delty».

Może w wyrobieniu opinii pomoże przykład problemu, który jest łatwiej rozstrzygnąć metodą syntetyczną niż analityczną, i przykład problemu, w którym zależność jest odwrotna.

I. Znaleźć punkt symetryczny do danego względem danej prostej. Metodami syntetycznymi robi się to przez trzy pociągnięcia cyrklem (patrz rysunek), i to stale o tej samej rozwartości. Metodę analityczną zechce Czytelnik sam wypróbować. Podam rozwiązanie: symetryczny do punktu (p, q) względem prostej o równaniu $ax+by+c=0$ jest punkt

$$\left(\frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}p-\frac{2ab}{a^2+b^2}q-\frac{2ac}{a^2+b^2},\quad \frac{-2ab}{a^2+b^2}p+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}q-\frac{2bc}{a^2+b^2}\right).$$

Przyjemnych rachunków!



II. Udowodnić, że złożenie (wykonanie po kolei) trzech symetrii środkowych jest symetrią środkową. Metoda syntetyczna jest długa i dość żmudna (patrz np. podręcznik dla I klasy liceum). Natomiast analitycznie: współrzędnymi punktu symetrycznego do (p, q) względem (a, b) są $(2a-p, 2b-q)$.

Zauważmy, że jeśli

$$(p_1, q_1) = (2a_1-p, 2b_1-q),$$
$$(p_2, q_2) = (2a_2-p_1, 2b_2-q_1),$$
$$(p_3, q_3) = (2a_3-p_2, 2b_3-q_2),$$

to

$$(p_3, q_3) = \big(2(a_3-a_2+a_1)-p,\ 2(b_3-b_2+b_1)-q\big).$$

Symetria względem punktu $(a_3-a_2+a_1, b_3-b_2+b_1)$ jest zatem złożeniem symetrii względem punktów (a_1, b_1), (a_2, b_2) i (a_3, b_3).

Na pytanie co to jest fizyka odpowiada

prof. dr Grzegorz BIAŁKOWSKI

Każdy z nas przychodząc na świat, a właściwie należałoby powiedzieć: zasiadając na ławie szkolnej, zastaje pewien obraz nauk, które w sposób mniej lub bardziej schematyczny dzielą między siebie dotychczasowy dorobek myśli ludzkiej. Dowiadujemy się na przykład, że równia pochyła i kalorymetr — to fizyka, natomiast sole i kwasy — to chemia, a pływak żółtobrzeżek i moczarka kanadyjska — to biologia. Oczywiście później przekonujemy się, że fizyka, w odróżnieniu od Coca-Coli, „to nie jest to", lecz znacznie, znacznie więcej.

Podobnie jest i z innymi naukami. Faktem jest jednak, że niepostrzeżenie przyzwyczajamy się do pewnej klasyfikacji, która ukształtowała się historycznie i która, całkiem słusznie, jest podstawą nauczania szkolnego. Nie lekceważąc tej tradycji mamy jednak prawo, a nawet obowiązek, zadać sobie pytanie, czy ta klasyfikacja nauk jest całkowicie uzasadniona merytorycznie, czy też, częściowo przynajmniej, ma charakter przypadkowy.

Dzieje nauk dostarczają nam wielu pouczających przykładów, że zjawiska pozornie zupełnie ze sobą nie powiązane są w rzeczywistości pokrewne i mogą być wyjaśnione w sposób jednolity. Któż na przykład w początku XIX wieku mógł podejrzewać, że zachowanie się kompasu, skurcze żabich udek i tęcza w istocie rzeczy podlegają tym samym prawom, które później, po kilkudziesięciu latach, zostały w ostatecznej postaci sformułowane przez Maxwella? To połączenie się nauki o magnetyzmie, nauki o elektryczności, nauki o prądzie elektrycznym, optyki i innych jeszcze nauk w pewną całość, którą jest klasyczna teoria elektromagnetyzmu, najlepiej wskazuje, że dobrze jest od czasu do czasu „przewietrzyć" aparat pojęciowy odziedziczony po poprzednich pokoleniach.

Weźmy inny przykład, a mianowicie rozpatrzmy wzajemny stosunek fizyki i astronomii. Wcześnie, jeszcze w czasach starożytnych, stworzono już pewne elementy astronomii, ujęte poprawnie od strony opisowej. Natomiast fizyka istniała wówczas w postaci prawa Archimedesa, pewnych zasad statyki i mało czego jeszcze. Astronomia była więcej niż nauką, była sztuką (miała swoją muzę!), i więcej niż sztuką, bo była częścią wierzeń religijnych. Fizyka natomiast prawie że nie była nauką — była umiejętnością, służyła budowniczym do dźwigania kamieni, jeżeli nie liczyć słynnego *quizu* ze złoto-srebrną koroną tyrana Syrakuz (był to raczej dowód wielkości Archimedesa niż samej fizyki).

Mimo stopniowego rozwoju, głównie mechaniki i optyki, fizyka pozostawała do czasów nowożytnych taką właśnie prawie nauką świata ziemskiego, podczas gdy astronomia zajmowała się sprawami znacznie „wznioślejszymi" — sprawami niebios. Sytuacja ta zaczęła się radykalnie zmieniać od czasów Kopernika.

Odbierając Ziemi jej uprzywilejowane stanowisko we Wszechświecie, Kopernik uczynił ją jedną z planet, co musiało doprowadzić do prób wyjaśnienia zjawisk astronomicznych prawami fizyki ziemskiej. Jak wiemy, milowym krokiem w tym kierunku były odkrycia Newtona, który spadanie jabłek i ruch planet po orbicie podporządkował tym samym prawom fizycznym. Dziś jest zupełnie oczywiste dla każdego, że astronomia jest fizyką odnoszącą się do szczególnego kręgu zjawisk: wielkich mas, wielkich ciśnień, ogromnych temperatur, a może przede wszystkim przytłaczającej swymi rozmiarami próżni kosmicznej, wypełnionej niesłychanie rzadkim pyłem i promieniowaniem — głównie elektromagnetycznym.

Podobnie rzecz się ma np. z meteorologią oczywiście zakładając, że uzna się ją już dziś za „pełnokrwistą" naukę, mógłby bowiem ktoś o tym powątpiewać biorąc pod uwagę, że wróżby z przysłów ludowych o pogodzie sprawdzają się nie gorzej niż prognozy opracowywane przez sztab synoptyków i komputery. Nikt jednak nie ma wątpliwości co do tego, że zachowaniem wielkich mas powietrza rządzą prawa fizyki, a nie kaprysy istot nadludzkich.

Postawiliśmy pytanie, czym jest fizyka. Narzucają się dwa sposoby szukania odpowiedzi na to pytanie. Zastanówmy się najpierw, czy fizyka nie posługuje się jakąś szczególną, jej tylko właściwą metodą badań, która odróżnia ją od innych nauk.

Metoda taka niewątpliwie istnieje. Jest ona oparta na doświadczeniu, ale jednocześnie ujmuje jego wyniki w skomplikowanym i wysoce sformalizowanym systemie matematycznym. Wszelako inne nauki przyrodnicze także posługują się podobną metodą badań. Różnice między poszczególnymi naukami nie mają charakteru zasadniczego, gdyż polegają głównie na stopniu zaangażowania matematyki w analizę danych czerpanych z doświadczenia. Z drugiej strony w obrębie samej fizyki ujawniają się analogiczne różnice pomiędzy jej poszczególnymi działami. Można by też jako kontrargument przytoczyć pewien fakt historyczny, a mianowicie, że stopień sformalizowania zarówno fizyki, jak i pozostałych nauk stale wzrasta; czy jednak biologia na przykład i fizyka rzeczywiście tylko tym się różnią i czy staną się tą samą nauką z chwilą, gdy pierwsza z nich osiągnie ten sam stopień nasycenia matematyką, co i druga? Wątpliwe. Tak więc, choć w metodzie badawczej dzisiejszej fizyki z pewnością jest coś specyficznego tylko dla tej nauki, można powątpiewać, czy wystarcza to do wyodrębnienia jej spośród innych nauk.

Na pierwszy rzut oka bardziej obiecujący wydaje się drugi możliwy sposób określenia fizyki, a mianowicie przez jej przedmiot. Tak można bowiem ująć wiele nauk: biologię — jako naukę o organizmach żywych, geologię — jako naukę o budowie Ziemi, astronomię — jako naukę o budowie ciał niebieskich i ich skupisk. Rychło jednak przekonujemy się, że w wypadku fizyki natrafiamy tu na jakąś istotną trudność. Przedmiotem zainteresowania fizyki są bowiem zjawiska zachodzące zarówno w skali pojedynczego elektronu, który ma rozmiary zapewne rzędu 10^{-15} *m*, jak i całego Wszechświata: wszak kosmologia także jest działem fizyki. Fizyka zajmuje się zjawiskami w całej skali ciśnień, temperatur czy prędkości. Po tej więc drodze nie można dojść do żadnej definicji tej nauki. Nie można bowiem wskazać żadnego obiektu ani zjawiska, które nie mogłyby być badane przez fizykę. Nauka ta przyniosła wyjaśnienie budowy atomu i natury wiązania chemicznego. Tym samym chemia, nauka o ogromnych tradycjach i równie wielkim znaczeniu w życiu społecznym stała się właściwie gałęzią fizyki, stosującą, rzecz jasna, specyficzne metody, ale w swych podstawach niezrozumiałą bez mechaniki kwantowej, bez fizyki statystycznej i bez elektrodynamiki. Chemia zaś — wraz z fizyką „właściwą" — stanowi podstawę biologii. Organizm jest wszak pewną (ogromnie skomplikowaną, to prawda) strukturą atomów i cząsteczek, a szczególnie cząsteczek białka. Prawa genetyki, mające dla biologii tak zasadnicze znaczenie, mogły stać się zrozumiałe tylko dzięki fizyko-chemicznym badaniom pewnych białek i kwasów organicznych. Jeżeli przyjąć, że geny wyznaczają w jakiś, niedość jeszcze zbadany sposób rozwój i predyspozycje organizmu, to otwiera się przed nami możliwość sprowadzenia biologii do chemii i fizyki, a więc w ostatecznym bilansie do samej fizyki.

Astronomowie nie są pewni, w jakiej odległości położone są najdalsze obserwowane dziś obiekty, należące, jak wiadomo, do kwazarów. Odległość ta wynosi zapewne około 10^{26} *cm*.

Idąc dalej można by pomyśleć, że skoro zjawiska psychiczne są pewnym przejawem działalności mózgu, a budowę tego organu stara się wyjaśnić właśnie biologia (jej dział zwany neurofizjologią), to w pewien odległy sposób także psychologia jest córką fizyki.

Nawet nie posuwając jeszcze dalej tego rozumowania widzimy, że przed fizyką otwierają się zawrotne perspektywy: jako najbardziej podstawowa i uniwersalna z istniejących obecnie nauk o przyrodzie ona jedna ma szanse stać się wszechnauką, której prawa wyjaśniałyby — potencjalnie rzecz biorąc — wszystkie zjawiska w ogóle.

Należy sobie zdać sprawę z tego, że przedstawiliśmy tutaj bardzo odległą ekstrapolację obecnego stanu nauk. Aby ekstrapolację tę uznać za poprawną, należy przyjąć szereg hipotez, które w mniejszym lub większym stopniu mają charakter tez filozoficznych. Należy na przykład uznać tezę o jedności Wszechświata, zgodnie z którą nie rozpada się on na szereg nie powiązanych ze sobą dziedzin (np. „fizyczną", „chemiczną", „biologiczną", „psychiczną" itd.), lecz jest w swej materialnej naturze jednolity. Należy też przyjąć, że ze wzrostem złożoności układów materialnych nie pojawiają się w tych układach zjawiska nowe, w tym sensie, że nie można ich przewidzieć na podstawie znajomości zjawisk zachodzących w układach prostszych. Właśnie ta teza musi budzić najwięcej wątpliwości.

Przypatrzmy się bowiem samej fizyce. Fizyka cząstek elementarnych daje — wprawdzie dziś jeszcze niedokładne — pojęcie o naturze sił działających między dwoma protonami czy też między protonem i neutronem. Cząstki te, jak wiadomo, są składnikami jąder atomowych, wydawałoby się więc, że fizyka jądra nie ma nic innego do roboty, jak tylko zastosować te elementarne prawa w badanej przez siebie dziedzinie. Tak jednak nie jest; już teoria najprostszych jąder (w mniejszym stopniu deuteronu, a w większym trytonu) nastręcza wiele trudności.

Źródeł tych trudności jest wiele: i kłopoty z rozwinięciem teorii wiązania jądrowego zgodnej z prawami relatywistycznymi, i konieczność badania układu bardzo wielu ciał (złożone jądra zawierają kilkaset nukleonów), i wreszcie całkowity brak jasności co do tego, czy np. siły działające w układzie trzech nukleonów można bez reszty sprowadzić do sił między parami nukleonów wchodzących w skład tej trójki. Podobne trudności pojawiają się w innych działach fizyki. I tak np. nie zakończyły się powodzeniem dotychczasowe próby ugruntowania mechaniki statystycznej w mechanice zwykłej — klasycznej lub kwantowej. Przykładów można by podać wiele.

Ogólnie zatem trzeba powiedzieć, że nasze wątpliwości co do tego, czy układy bardziej złożone można wyjaśnić, znając zachowanie układów prostszych, pochodzą z dwu przyczyn: po pierwsze z uświadomienia sobie trudności napotykanych przy samym już tylko opisie układów złożonych zawierających bardzo wiele układów prostszych, a po drugie z niepewności co do tego, czy układy prostsze (np. nukleony w jądrze) mogą ujawniać pewne swe właściwości (np. siły trójnukleonowe), dopóki nie zgromadzi się ich w odpowiedniej liczbie (np. tworząc jądro trytu). Gdyby wątpliwości te były uzasadnione, nie moglibyśmy nigdy oczekiwać, że prawa biologii zostaną sprowadzone do praw fizyki, a to z tego powodu, że w układach biologicznych — mówiąc naiwnie — mogą działać takie siły, które ujawniają się dopiero w momencie powstania takiego układu.

Kwestii tych nie można rozwiązać inaczej, jak tylko w praktyce naukowej. Wyjaśni je dalszy rozwój nauk, a w tym również rozwój fizyki. Jest jednak rzeczą jasną, że udział fizyki w badaniach naukowych w ogóle będzie stale wzrastać, że coraz bardziej przenikać ona będzie do innych nauk, dawniej w stosunku do niej całkiem obcych, jak np. biologia.

Kończąc te uwagi uświadamiam sobie, że nie dałem ostatecznie odpowiedzi na pytanie tytułowe „Co to jest fizyka?" Chyba jednak — jest ona czymś więcej niż skrzypieniem kredą po tablicy szkolnej.

Rozwiązanie zadania F3

Oznaczmy odległość urzędów A i C od ulicy $A'C'$ odpowiednio przez a i b. Niech punkt B' oznacza położenie dowolnego adresata na ulicy $A'C'$. W układzie współrzędnych, przedstawionym na rysunku, współrzędne punktów A, B' i C wynoszą odpowiednio: $A(0, a)$, $B'(x, 0)$, $C(A'C', b)$, a poszczególne odcinki drogi mają długości:

$AB' = \sqrt{a^2+x^2}$ i $B'C = \sqrt{b^2+(A'C'-x)^2}$. Jeżeli listonosz idzie z przesyłką z prędkością v_1, a bez przesyłki z prędkością v_2, to czas ruchu na drodze $AB'C$ wynosi

$$t = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{b^2+(A'C'-x)^2}\,, \tag{1}$$

gdzie $x \in \langle 0, A'C' \rangle$, gdyż listonosz wybiera adresata mieszkającego przy placu (punkt B).

Ekstremalną wartość przyjmuje czas t dla x spełniającego warunek $\frac{dt}{dx} = 0$, a więc

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{A'C'-x}{\sqrt{b^2+(A'C'-x)^2}} = 0.$$

Warunek ten można wyrazić za pomocą kątów α i β w postaci

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}, \text{ gdzie } \quad \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Jest to znana postać prawa załamania światła.

Pozostaje jeszcze wykazać, że warunek (2) określa minimalny czas przejścia trasy $AB'C$. Funkcje $t(x)$ oraz $\frac{dt(x)}{dx}$ są ciągłe, zatem warunek (3) określa minimum, gdy $\frac{d^2t}{dx^2} > 0$, co spełnione jest dla $x \in (0, A'C')$, gdyż z (1) otrzymujemy

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{v_1}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2}\frac{b^2}{(b^2+(A'C'-x)^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

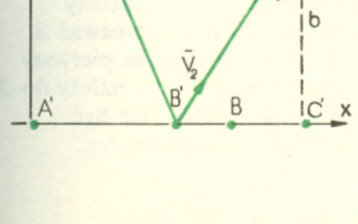
Najkrótszy czas marszu uzyskał listonosz, gdy wyszedł z urzędu A pod kątem $\alpha = \alpha_0$. Zatem po podstawieniu $\alpha = \alpha_0$ z warunku (2) otrzymujemy

$$\sin\beta = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha_0\,. \tag{3}$$

Listonosz nie mógł iść na odcinku AB z paczką, gdyż wówczas $\frac{v_2}{v_1} = 3$ i dla $\alpha_0 = 30^\circ$ otrzymujemy z warunku (3) $\sin\beta = \frac{3}{2} > 1$, a więc warunek (2) może być spełniony w tym przypadku tylko dla kąta $\alpha < \alpha_0$.

Kontynuując analogię do biegu światła możemy stwierdzić, że zmianie prędkości ruchu listonosza po oddaniu paczki odpowiada zmiana prędkości światła przy przejściu do ośrodka o mniejszym współczynniku załamania. Niemożliwość spełnienia warunku (3) odpowiada w tej analogii niemożliwości załamania się światła; kąt padania α_0 jest tu większy od kąta granicznego, a w takiej sytuacji następuje całkowite wewnętrzne odbicie światła.

Warunek ekstremalny (3) przy kącie α_0 może być spełniony tylko wówczas, gdy $v_2 = v_1$, tzn. gdy listonosz idzie na odcinku AB bez paczki, z listem, a więc gdy nie zmienia swej prędkości po oddaniu przesyłki. Wówczas z warunku (3) otrzymujemy $\sin\beta = \sin\alpha_0$, skąd $\beta = \alpha_0 = 30^\circ$, gdyż z warunków zadania wynika, że $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Zatem listonosz doręczył list.



O dobrym porządku pisze

prof. dr Andrzej MOSTOWSKI, członek rzeczywisty PAN

Z pierwszej części tego artykułu, zamieszczonej w numerze 2, mógł Czytelnik się dowiedzieć, co to takiego jest porządek i jaki porządek nazywamy dobrym. Sama jednak definicja nie pozwala w pełni zorientować się, czym są zbiory dobrze uporządkowane. Oto kilka własności i zastosowań tego pojęcia:

1. Liczby porządkowe. Postarajmy się najpierw uzmysłowić sobie strukturę zbioru dobrze uporządkowanego A. Jeśli jest on niepusty, to ma element pierwszy, nazwijmy go x_0. Jeśli w A są jeszcze inne jakieś elementy, to tworzą one podzbiór A, który ma element najwcześniejszy, oczywiście różny od x_0; nazwiemy go x_1. Jeśli x_0 i x_1 jeszcze nie wyczerpują zbioru A, to jest w A element najwcześniejszy różny od x_0 i x_1; nazwiemy go x_2 itd. Postępowanie to kończy się po skończonej liczbie n kroków, o ile zbiór A jest skończony i ma n elementów. Zbiór A składa się wtedy z elementów $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ uporządkowanych tak, że $x_0 \leqslant_R x_1 \leqslant_R \ldots \leqslant_R x_{n-1}$.
Jeśli zbiór A nie jest skończony, to ma on elementy $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ dla każdego naturalnego n, uporządkowane tak jak liczby całkowite nieujemne, tj. tak, że $x_0 \leqslant_R x_1 \leqslant_R x_2 \leqslant_R \ldots \leqslant_R x_n \leqslant_R \ldots$. Elementy te mogą wyczerpywać cały zbiór A; mówimy wtedy, że ma on typ ω; są jednak i takie zbiory, w których istnieją dalsze elementy w ilości skończonej lub nie. Za wszystkimi elementami x następuje wtedy nowy element x_ω, za nim dalszy, oznaczany przez $x_{\omega+1}$, itd. (Por. przykłady (v) i (iii) z pierwszej części artykułu).

Do przeliczania zbiorów skończonych służą nam liczby całkowite nieujemne 0, 1, 2, ... Jak widzimy, do przeliczania zbiorów dobrze uporządkowanych służą „liczby" ogólniejsze: widzieliśmy, że prócz liczb całkowitych nieujemnych potrzebne nam były „liczby" ω, $\omega+1$ i dalsze, aby móc ponumerować nimi elementy zbioru dobrze uporządkowanego nieskończonego. Zbiory dobrze uporządkowane prowadzą zatem do uogólnienia pojęcia liczby naturalnej (całkowitej nieujemnej). Nowe „liczby", do których dochodzimy przez rozważanie zbiorów dobrze uporządkowanych, noszą nazwę liczb porządkowych. Są to ciekawe abstrakcyjne twory, badane w teorii mnogości.

2. Indukcja pozaskończona. Czytelnik zna z pewnością z kursu szkolnego twierdzenie o indukcji matematycznej: niech T będzie zbiorem liczb całkowitych nieujemnych, takim, że (I) 0 jest elementem T; i ponadto spełniającym dla dowolnego x warunek (II) jeśli x należy do T, to $x+1$ należy do T. Wówczas T zawiera wszystkie liczby całkowite nieujemne. Twierdzenie to stanowi podstawę do tzw. dowodów indukcyjnych: aby dowieść, że każda liczba całkowita nieujemna ma jakąś własność W, wystarcza pokazać, że (I') 0 ma własność W; (II') dla dowolnego x — jeśli x ma własność W, to również $x+1$ ma własność W. Istotnie, jeśli założenia (I') i (II') są spełnione, to zbiór T tych liczb całkowitych nieujemnych, które mają własność W, spełnia założenie (I) i (II) twierdzenia o indukcji, a więc zawiera wszystkie liczby całkowite nieujemne.

Twierdzenie o indukcji matematycznej daje się uogólnić na dowolne zbiory dobrze uporządkowane. Niech A będzie zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację $\leqslant_R$ i niech T będzie podzbiorem A o następującej własności: dla dowolnego x należącego do A, jeśli każdy element y różny od x i poprzedzający x należy do T, to x należy do T; wówczas $T = A$. Dowód jest bardzo prosty: niech X będzie zbiorem tych elementów A, które nie należą do T; ponieważ A jest zbiorem dobrze uporządkowanym, więc X, o ile nie jest puste, ma pierwszy element x. Wówczas żaden element różny od x i poprzedzający x nie należy do X, to znaczy, że każdy taki element należy do T. Z założenia x musi więc być elementem T, a to jest sprzeczne z określeniem x. Zatem X jest puste, tzn. $T = A$.

Udowodnione powyżej twierdzenie nosi nazwę twierdzenia o indukcji pozaskończonej. Stanowi ono podstawę metody nazywanej indukcją pozaskończoną, podobnej do zwykłej zasady indukcji i pozwalającej ustalać własności elementów zbioru dobrze uporządkowanego. Metoda ta jest następująca:

Aby dowieść, że wszystkie elementy zbioru dobrze uporządkowanego A mają jakąś własność W, wystarczy sprawdzić, iż dla każdego elementu x zbioru A —

Rozwiązanie zadania M7

Niech x_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) oznacza liczbę egzaminów, które student miał zdać na j-tym roku studiów. Ma więc być

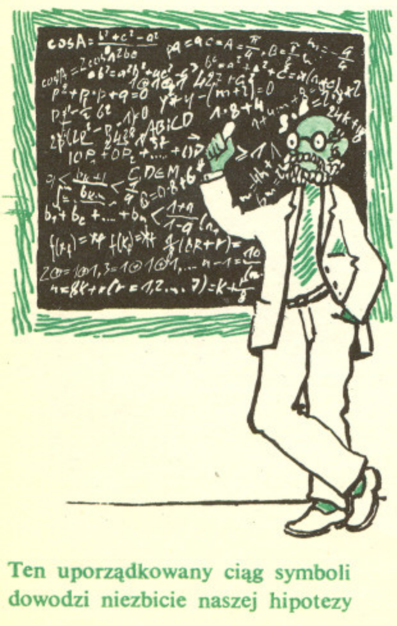
(1) $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$,

(2) $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 31$,

(3) $3x_1 = x_5$,

(4) liczby x_j są całkowite.

Najpierw ustalimy, czemu równa się x_1. Jeżeli $x_1 = 1$, to $x_5 = 3$ i nie można znaleźć liczb spełniających warunki (1) i (4). Jeżeli $x_1 = 2$, to $x_5 = 6$; wówczas na mocy warunku (1) znajdujemy $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$ i liczby te nie spełniają warunku (2). Jeżeli $x_1 \geqslant 4$, to $x_5 \geqslant 12$, a ponadto $x_2 \geqslant 5$, $x_3 \geqslant 6$, $x_4 \geqslant 7$. Wówczas $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geqslant 4+5+6+7+12 = 34$, co przeczy warunkowi (2).
Jeżeli $x_1 = 3$, to $x_5 = 9$. Między 3 a 9 znajduje się pięć liczb całkowitych: 4, 5, 6, 7, 8. Spośród nich trzeba tak wybrać wartości x_2, x_3, x_4, by ich suma była równa $31-3-9 = 19$. Jeżeli $x_4 \leqslant 7$, to $x_3 \leqslant 6$ i $x_2 \leqslant 5$ oraz $x_2+x_3+x_4 \leqslant 18$. Musi więc być $x_4 = 8$ (liczb x_2 i x_3 nie można określić jednoznacznie; są to 4 i 7 lub 5 i 6).



Ten uporządkowany ciąg symboli dowodzi niezbicie naszej hipotezy z założenia, że wszystkie elementy poprzedzające x i różne od x mają własność W — wynika, iż x też ma własność W. Ta metoda dowodu jest często stosowana w teorii mnogości.

...jako aksjomat przyjmiemy, że wszystko da się dobrze uporządkować.

3. Własności mocy zbiorów dobrze uporządkowanych. O zbiorze X mówimy, że jego moc jest nie większa od mocy zbioru Y, jeśli istnieje funkcja wzajemnie jednoznaczna o dziedzinie X i o zbiorze wartości zawartym w Y. Jeśli zbiorem wartości tej funkcji jest cały zbiór Y, to mówimy, że zbiory X i Y mają moce równe.
W teorii mnogości dowodzi się szeregu ciekawych twierdzeń o mocach zbiorów dobrze uporządkowanych. Nie będziemy ich tutaj dowodzili, ale wymienimy kilka najważniejszych. We wszystkich podanych niżej twierdzeniach A i B oznaczają zbiory dobrze uporządkowane, przyczem moc B jest niewiększa niż moc A, a zbiór A jest nieskończony.

Twierdzenie o mocy kwadratu: Zbiór wszystkich par uporządkowanych (a', a''), gdzie a', a'' przebiegają elementy zbioru A, ma moc równą mocy A.

Twierdzenie o mocy sumy: Suma zbiorów A i B ma moc równą mocy A.

Twierdzenie o mocy iloczynu: Jeśli zbiór B jest niepusty, to zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b), gdzie a przebiega zbiór A, zaś b zbiór B, ma moc równą mocy A.

4. Problem dobrego uporządkowania. Uwagi o podstawach teorii mnogości. Podane wyżej twierdzenia pokazują, że o zbiorach dobrze uporządkowanych i zwłaszcza o ich mocach umiemy udowodnić wiele interesujących faktów. Nasuwa się pytanie, czy fakty te pozostają prawdziwe dla dowolnych zbiorów. Odpowiedź twierdząca na to pytanie wynika z następującego zasadniczego wyniku:

Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu: dla każdego zbioru X istnieje relacja R dobrze porządkująca zbiór X.

Twierdzenie to wymaga do dowodu tzw. pewnika wyboru, który sformułowany był *explicite* w początku obecnego stulecia właśnie przy okazji dowodu twierdzenia o dobrym uporządkowaniu i który dał okazję do przeprowadzenia dogłębnej dyskusji nad podstawami teorii mnogości. Z dyskusji tej wynikało jasno, że nie wszyscy matematycy są zgodni co do założeń, jakie przyjmuje się dla zbiorów, w szczególności niektórzy uważali, że nie ma żadnych powodów, które skłaniać nas powinny do przyjmowania pewnika wyboru za zdanie prawdziwe. Ponieważ pewnik wyboru łatwo wynika z twierdzenia o dobrym uporządkowaniu, więc matematycy kwestionujący prawdziwość pewnika wyboru kwestionują tym samym prawdziwość twierdzenia o dobrym uporządkowaniu.

Większość matematyków przyjmuje wprawdzie pewnik wyboru i twierdzenie o dobrym uporządkowaniu za prawdziwe, jednak przyjęcie tych założeń nie usuwa wszystkich trudności, jakie wystąpiły w teorii mnogości.

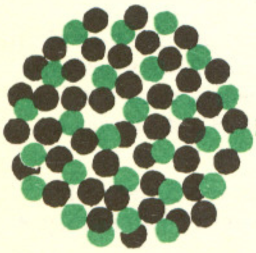
Teoria zbiorów dobrze uporządkowanych pozwoliła więc uzyskać wielkie postępy w teorii mnogości, które uczyniły z niej sprawne narzędzie do badania innych działów matematyki, a także doprowadziła, wespół z innymi działami teorii mnogości, o których tutaj nie mieliśmy okazji wspominać, do powstania nie rozwiązanych jeszcze, a pasjonujących problemów, dotyczących podstaw teorii mnogości i ogólnej filozofii matematyki.

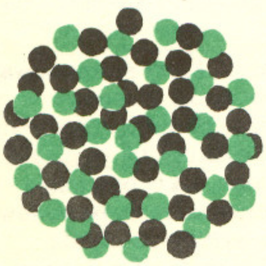
Rozwiązanie zadania M9

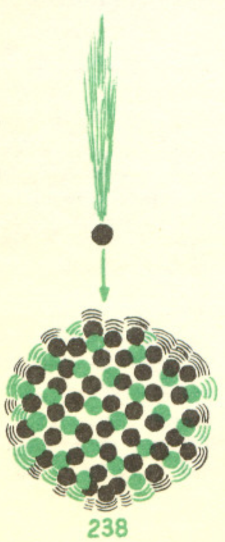
Odpowiedź jest twierdząca.
Idea dowodu jest następująca. Wierzchołki A, B, C czworokąta umieszczamy jeden blisko drugiego, zaś czwarty wierzchołek D oraz punkt wewnętrzny P — też blisko jeden drugiego, lecz daleko od A, B, C. Niech l będzie odległością między „miejscem", gdzie znajdują się punkty A, B, C, od „miejsca", gdzie znajdują się D i P. Wówczas $AB \approx 0$, $AC \approx 0$, $CD \approx l$, $DB \approx l$, $PA \approx l$, $PB \approx l$, $PC \approx l$, $PD \approx 0$, $AB+BD+DC+CA \approx 2l$, $PA+PB+PC+PD \approx 3l$.
Oczywiście nie jest to ścisły dowód. Jeżeli redagujemy na przykład rozwiązanie zadania olimpijskiego, to powinno ono wyglądać w następujący sposób:
Na prostej k obieramy punkty A, M, O i D leżące w podanej kolejności i tak, że $AM = OD = 1$, $MO = 10$. Przez punkt M prowadzimy prostą p prostopadłą do k i na p, po różnych stronach prostej k, obieramy takie punkty B i C, że $MB = MC = 1$ (Czytelnik zechce wykonać rysunek). Wówczas $AB = AC = \sqrt{2}$, $BD = CD = \sqrt{1+121} = \sqrt{122}$. $OA = 11$, $OB = OC = \sqrt{101}$, $OD = 1$. Wykażemy, że $OA+OB+OC+OD > AB+BD+DC+CA$, tzn. $12+2\sqrt{101} > 2\sqrt{2}+2\sqrt{122}$, co jest równoważne nierówności $6-\sqrt{2} > \sqrt{122}-\sqrt{101}$. Ponieważ $\sqrt{2} < 2$, więc $6-\sqrt{2} > 4$. Mamy ponadto $\sqrt{122}-\sqrt{101} = \frac{122-101}{\sqrt{122}+\sqrt{101}} = \frac{21}{\sqrt{122}+\sqrt{101}} < \frac{21}{2\sqrt{100}} = \frac{21}{20}$.

Wykazaliśmy więc, że $6-\sqrt{2} > 4 > \frac{21}{20} > \sqrt{122}-\sqrt{101}$

Dlaczego Niemcy nie zdążyli wynaleźć bomby atomowej? (2)

1  235

99  238



238

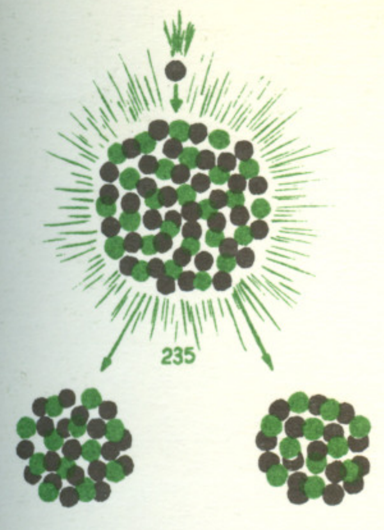
Doktor Erich Bagge z duszą na ramieniu przekraczał progi okazałego budynku na Hardenbergerstrasse, w którym mieścił się Urząd Uzbrojenia Armii Ministerstwa Wojny Rzeszy. W kieszeni tkwił powód jego niepokoju — żółta koperta, zawierająca rozkaz, by się natychmiast stawił w Berlinie. Zapakował więc do małej walizeczki szczoteczkę do zębów, fotografie rodzinne, ciepłą bieliznę, trochę drobiazgów i pożegnawszy się z rodziną czym prędzej wsiadł w pociąg. Przygotowany był na najgorsze, nawet na front.
— Ale jeśli na front, to po co mnie ściągali z Lipska aż do ministerstwa? — pocieszał się w duchu.
Nagle ktoś go poklepał po ramieniu. Usłyszał znajomy głos:
— Nareszcie jesteś, chłopie, nic się nie zmieniłeś.
Erich obejrzał się. Przed nim stał jego dawny znajomy ze studiów, doktor Kurt Diebner.
— Dostałem wezwanie... — zaczął Bagge, ale Diebner nie dał mu dokończyć.
— Wiem, to właśnie ja cię wezwałem.
I tonem niby przeproszenia dodał:
— Wiesz, wojna. Nie mogłem napisać koleżeńskiego listu, a jesteś tu bardzo potrzebny. Chodźmy zaraz do Schumanna, wszystkiego się dowiesz.

Niepokój opuścił Baggego całkowicie, kiedy profesor Erich Schumann powiedział mu, że ma pomóc Diebnerowi w przygotowaniu specjalnej tajnej konferencji, na której omówiono by sprawy badań w zakresie fizyki jądrowej dla celów wojskowych.
— Doktor Diebner ustali z panem wszystkie szczegóły. Pamiętajcie panowie, że to mogą być sprawy bardzo ważne dla Rzeszy. Mamy dziś 9 września 1939 roku, proszę się śpieszyć, wojna już trwa. Heil Hitler! — zakończył rozmowę.

Listę uczonych, których należało zaprosić na konferencję, opracowali bardzo szybko. Schumann ją zatwierdził. 14 września wezwania do stawienia się w Ministerstwie Wojny Rzeszy za dwa dni otrzymali w takich samych złowróżbnych żółtych kopertach między innymi Bothe, Geiger, Stetter, Hoffmann, Mattauch, Hahn, Flügge. Zabrakło na niej profesora Abrahama Esaua, pierwszego inicjatora rządowego programu badań jądrowych z ramienia Ministerstwa Oświaty Rzeszy. Bagge zapytał o niego Diebnera, ale ten dał wymijającą odpowiedź:
— Wiesz, to dziwna historia, muszę się trzymać rozkazów.
I nie wiadomo, czy uśmiech zażenowania, czy satysfakcji przemknął po jego twarzy.

Bagge dopiero znacznie później dowiedział się, że Esau stanowił przypadek dość symptomatyczny dla współpracy niemieckich uczonych między sobą. Ba, sam Esau, gorący i zasłużony zwolennik nazizmu, nie chciał w to uwierzyć, dopóki nie zmuszono go do wycofania się z gry. Zdając sobie sprawę, że badania jądrowe muszą wcześniej czy później zainteresować armię, 4 września sam skontaktował się z Ministerstwem Wojny. Uzyskał przyrzeczenie poparcia osobiście od gen. Beckera, który polecił mu, by sprawy formalne załatwił z Schumannem. Do Schumanna jednak nie dostał się, a sprawa przybrała po kilku dniach obrót, który wprawił Esaua w zdziwienie i irytację: polecono mu, by bezwłocznie zaniechał jakichkolwiek kroków i badań, gdyż przejęło je całkowicie wojsko. Wkrótce potem zmuszono go do oddania niewielkich zapasów tlenku uranu, jakie zdołał zdobyć tuż przed wojną, zanim jeszcze ministerstwo wojny nie podjęło zdecydowanych i monopolizujących kroków. Nigdy już nie odegrał roli w niemieckich badaniach jądrowych, choć nie chciał się z tym do końca pogodzić i przy każdej okazji, z nową nadzieją, protestował przeciwko jawnemu dyskryminowaniu go.

Konferencja przygotowywana przez Diebnera i Baggego odbyła się 16 września. Niewiele jeszcze wtedy wiedziano o samym mechanizmie rozszczepiania. Naturalny uran jest mieszaniną dwóch izotopów: uranu 235 i uranu 238. Wiele wskazywało na to, że rozszczepieniu ulega jedynie ten pierwszy izotop. Naturalny uran zawiera go jednak mniej niż 1%. Pierwszą sprawą było więc rozdzielenie izotopów i zbadanie zachowania się każdego z nich pod wpływem bombardowania neutronami. Zadanie to przypadło w udziale prof. Paulowi Harteckowi, wybitnemu specjaliście w dziedzinie rozdzielania izotopów. Uczeni rozumieli, że badań nie można prowadzić bez żadnych wskazówek teoretycznych,



które nakreślałyby przynajmniej ich kierunek. Mimo oporów zdecydowano jednak, za namową Baggego, zaprosić do pracy wybitnego niemieckiego teoretyka, laureata nagrody Nobla, Wernera Heisenberga, który miał opracować teorię łańcuchowej reakcji rozszczepienia. Niechęć eksperymentatorów do Heisenberga to jeszcze jeden charakterystyczny rys akademickiej fizyki niemieckiej, w której istniało coś w rodzaju cichej wojny między teoretykami a eksperymentatorami.

Na konferencji uczeni dowiedzieli się też o całkowitym zakazie wszelkich publikacji na temat badań w fizyce jądrowej (został on nieznacznie uchylony dopiero w 1942 r.). Pozbawiło to ich czynnego udziału w ogólnoświatowej dyskusji, jaką stanowią publikacje naukowe, ale jednocześnie stawiało w pozycji dość uprzywilejowanej, gdyż i Anglicy, i Amerykanie, nie dostrzegając jeszcze niebezpieczeństwa, wprowadzili ten zakaz u siebie znacznie później. Fizycy niemieccy mogli więc dzięki temu przez dłuższy jeszcze czas korzystać z wyników badań swych kolegów zagranicznych, sami nie demaskując swych osiągnięć i poczynań.

Druga tajna konferencja zorganizowana przez Diebnera i Baggego odbyła się po dziesięciu dniach, 26 września 1939 r. Heisenberg przedstawił wtedy swój punkt widzenia: w przypadku kontrolowanej reakcji rozszczepienia z wykorzystaniem energii w sposób powolny, wystarczy zmieszać uran naturalny z jakąś substancją, która by hamowała prędkość neutronów (nie pochłaniając ich) wyzwalających się w wyniku rozszczepienia, do prędkości gwarantującej ich maksymalną efektywność, jeśli chodzi o inicjację następnych aktów rozszczepienia uranu 235 (uran 238 chętnie bowiem chwyta szybkie neutrony — trzeba je więc szybko wyhamować); w przypadku reakcji przeprowadzonej wybuchowo trzeba z mieszaniny wyeliminować niepożądany uran 238, czyli — użyć wydzielony z mieszaniny uran 235. Profesor P. Harteck z pełnymi obaw zastrzeżeniami zaproponował, by jako ów spowalniacz neutronów (moderator) użyć ciężką wodę.

Propozycje te w stosunkowo nieznacznym stopniu zmodyfikowały dość szczegółowy plan pracy na najbliższy okres, przygotowany przez Diebnera i Baggego.

Ogólnie zawierał on dwa zadania: rozdział izotopów uranu i zbadanie ich własności oraz pomiary odpowiednich parametrów wszystkich substancji, które mogą być brane w rachubę jako moderatory. W swej części szczegółowej wyznaczał ten plan konkretne zadania dla każdego z uczonych (lub ich grup). Atoli jeszcze raz złe tradycje akademickie doszły do głosu, kiedy inicjatorzy zaproponowali, aby utworzyć centrum naukowe, grupując wszystkich uczestników tych badań. Mieściłoby się ono w Instytucie Fizyki im. Cesarza Wilhelma w Dahlem (koło Berlina), przejętym właśnie przez wojsko na badania jądrowe. Uczeni jeden po drugim deklarowali swą współpracę, ale każdy podawał ważne powody, dla których nie mógł przenieść się na stałe do Berlina. Jak z późniejszych wypadków można się domyśleć, podstawową przyczyną tego były osobiste ambicje, by samemu, bez udziału konkurentów, dokonać zasadniczego kroku. Na swoich śmieciach każdy był swym panem, w Dahlem zaś byłby jednym z wielu, w dodatku miałby nimi kierować Diebner, którego większość z nich uważała nie tylko za nie dorastającego do ich poziomu debiutanta naukowego, ale też za zwykłego hitlerowca. Instytutem w Dahlem do czasu przejęcia go przez armię kierował bowiem wybitny fizyk holenderski Peter Debye. Odmówił on jednak przyjęcia obywatelstwa niemieckiego i musiał podać się faktycznie do dymisji (oficjalnie otrzymał urlop dla wygłoszenia wykładów w USA). Jego funkcję przejął Diebner, ale jako pełniący obowiązki.

W rezultacie w Dahlem powstała nowa grupa, do której akces zgłosili tylko nieliczni. Reszta rozjechała się do swoich ośrodków, by zabrać się do realizacji swoich zadań. Wszyscy zdawali sobie sprawę, że niezbędnym wstępnym etapem drogi do samej bomby atomowej jest najpierw budowa i uruchomienie reaktora jądrowego. Do tego potrzebne były jednak uran i moderator. Uranu początkowo Niemcy miały niewiele. Ich przemysł chemiczny zaczął jednak dość szybko produkować znaczne, jak na potrzeby badawcze, ilości związków uranu, a potem — także czystego uranu metalicznego (znacznie wcześniej niż Amerykanie), zwłaszcza że Niemcy zdobyli znaczne ilości surowca po podboju Belgii. Nie starczało go jednak dla wszystkich. Niejeden z fizyków niemieckich miał bowiem tę cichą nadzieję, że to właśnie on, bez udziału i pomocy innych, uruchomi pierwszy reaktor. Wydzierali więc sobie przydział uranu niekiedy jak przekupki, posuwając się nawet do misternych oszustw.

Oprac. Z.P.
wg książki D. Irwinga
The Virus House

c.d.n.