ciąg arytmetyczny $a_i = c + ip_1p_2\dots p_k$. Wiemy, że dla pewnych i oraz y zachodzi $P(a_i, y) = 0$, a więc również $Q_j(a_i, y) = 0$ dla pewnego j. Z drugiej strony:

$$Q_j(a_i, y) \equiv Q_j(t_j, y) \not\equiv 0 \pmod{p_j},$$

więc otrzymujemy sprzeczność.

Stąd wniosek, że któryś czynnik Q_j jest liniowy względem y; bez straty ogólności niech będzie to Q_1. Możemy zapisać go w postaci $A(x)y + B(x)$ dla pewnych wielomianów A, B. Jak wspomnieliśmy, możemy przyjąć, że $Q_1(x, y) = 0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y), zatem $A(x)$ dzieli $B(x)$ dla nieskończenie wielu wartości x. Ale to oznacza, że $A(x)$ dzieli $B(x)$ jako wielomian (żeby to zauważyć, można na przykład podzielić z resztą $B(x)$ przez $A(x)$). W konsekwencji $R(x) = -\frac{B(x)}{A(x)}$ jest wielomianem i ostatecznie $P(x, R(x)) = Q_1(x, R(x)) = 0$. □

Czytelnik Uważny spostrzeże, że w tezie twierdzenia 4 wielomian R ma jedynie współczynniki wymierne, a nie całkowite. Istotnie, na przykład dla $P(x, y) = x^2 + x - 2y$ dostaniemy $R(x) = \frac{x(x+1)}{2}$. Na koniec proponujemy więc zadanie ilustrujące, że w pewnych sytuacjach mimo wszystko R będzie miał współczynniki całkowite.

Zadanie. Załóżmy, że P, Q są dwoma wielomianami o współczynnikach całkowitych i o następującej własności: dla dowolnej liczby całkowitej n możemy znaleźć taką liczbę całkowitą m, że $P(n) = Q(m)$. Udowodnij, że wtedy istnieje wielomian $R(x)$ o współczynnikach wymiernych spełniający tożsamość $P(x) = Q(R(x))$. Jeśli ponadto wielomian $Q(\frac{x}{k})$ nie ma współczynników całkowitych dla żadnego $k \geqslant 2$, wykaż, że $R(x)$ ma współczynniki całkowite.

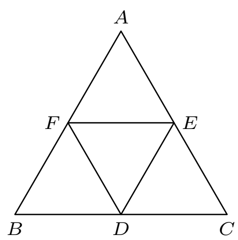
Policjanci i złodziej

*Alexandru BENESCU**

* Uczeń, Colegiul Național de Informatică Tudor Vianu, Rumunia

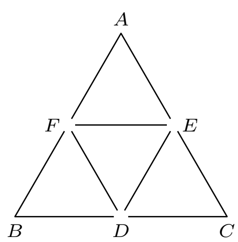
W tym artykule zajmiemy się następującym zagadnieniem.

Policjanci gonią złodzieja w pewnej wiosce, której uliczki tworzą trójkąt równoboczny wraz z jego środkowymi (rys. 1). Maksymalna prędkość złodzieja jest $\kappa > 0$ razy większa niż maksymalna prędkość policjantów. Zakładając, że wszyscy stale się widzą i ruch jest możliwy jedynie wzdłuż uliczek, należy określić, czy policjanci mogą schwytać złodzieja niezależnie od ich początkowego ustawienia.



Rys. 1

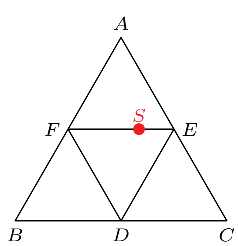
Rozpocznijmy rozwiązanie od analizy kilku prostych przypadków. Oznaczmy liczbę policjantów przez n. Załóżmy, że w wiosce znajduje się tylko jeden policjant, tj. $n = 1$. To banalny przypadek. Jeśli $\kappa < 1$ (tzn. złodziej jest wolniejszy od policjanta), policjant na pewno doścignie i schwyta złodzieja. Analogicznie, jeśli $\kappa \geqslant 1$, to złodziej może dowolnie długo uciekać przed policjantem, choćby biegając w cyklu $A \to B \to C \to A$ (rys. 1).



Rys. 2

Sytuacja zmienia się diametralnie (na korzyść wymiaru sprawiedliwości), gdy w pościgu bierze udział trzech (lub więcej) policjantów. Udowodnimy, że w tym przypadku schwytają oni złodzieja niezależnie od jego prędkości. Jedna ze strategii, które do tego doprowadzą, polega na jednoczesnym zajęciu punktów D, E i F (oznaczenia z rys. 1). W ten sposób policjanci podzielą całą wioskę na sześć spójnych części (składowych), jak pokazano na rysunku 2. W jednej z tych części znajduje się złodziej. Na jej krańcach (podobnie jak każdej innej części) znajdują się policjanci. Wystarczy, aby jeden z nich zaczął poruszać się (w ramach tej części) w stronę drugiego, a złodziej zostanie złapany.

Pozostaje rozważyć przypadek dwóch policjantów – ten jest bardziej wymagający. Udowodnimy najpierw, że dla $\kappa \leqslant 3$ policjanci zawsze złapią złodzieja. W tym celu jeden z policjantów będzie stale gonił rabusia – tego policjanta nazwiemy *gończym*. Jego jedynym zadaniem jest uniemożliwienie złodziejowi przyczajenia się na stałe w jednym miejscu. Dokładniej rzecz ujmując, musi on zadbać o to, by ostatnio odwiedzony przez złodzieja *punkt środkowy* zmieniał się w czasie (*punktami środkowymi* są punkty D, E lub F). Łatwo się przekonać, że aby to osiągnąć, wystarczy tylko jeden policjant.

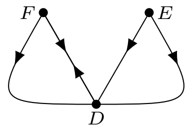


Rys. 3

Drugi policjant, którego nazwiemy *stróżem*, ma bardziej subtelne zadanie. Najpierw musi udać się do „stróżówki” znajdującej się w punkcie S, który dzieli odcinek EF w stosunku $1:2$ (rys. 3). Kiedy już tam dotrze, musi uważnie obserwować poczynania złodzieja. Zadaniem tego policjanta jest odcinanie drogi ucieczki złodzieja, gdy tylko jest to możliwe. Na przykład, jeśli złodziej wejdzie do „górnego naroża” $E{-}A{-}F$ przez punkt E, stróż musi uniemożliwić mu ucieczkę przez punkt F. Ma taką możliwość, gdyż $\frac{|EA|+|AF|}{|SF|} = 3 \geqslant \kappa$. Jest też pewien mały haczyk – w tym samym momencie, w którym złodziej powróci do punktu E, stróż musi ponownie znaleźć się w punkcie S. Jest to jednak możliwe do zrealizowania, wystarczy, że stróż będzie poruszał się z prędkością *dokładnie* trzy razy mniejszą niż złodziej (z zachowaniem odpowiedniego kierunku).

Oto pełna lista możliwości stróża w zakresie kontrolowania ruchu złodzieja:

(a) jeśli złodziej wchodzi do $E{-}A{-}F$ przez E, nie może uciec przez F,
(b) jeśli złodziej wchodzi do $E{-}A{-}F$ przez F, nie może uciec przez E,
(c) jeśli złodziej wchodzi do $D{-}B{-}F$ przez D, nie może uciec przez F,
(d) jeśli złodziej wchodzi do $D{-}C{-}E$ *lub* $D{-}E$ przez D, nie może uciec przez E.



Rys. 4

Jak już wiemy, *gończy* zmusza złodzieja do przechodzenia między punktami D, E i F. Warunki (a)–(d) nakładają poważne ograniczenia na kolejność, w jakiej punkty te będą odwiedzane:

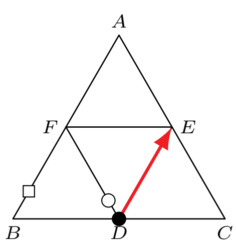
- tylko punkt D może być odwiedzony bezpośrednio po E lub F,
- tylko punkt F może być odwiedzony bezpośrednio po D, i to *jedynie* przez krawędź $D{-}F$.

Te ograniczenia są zilustrowane na rysunku 4. Wynika stąd, że policjanci mogą zmusić złodzieja do biegania w cyklu $D \to F \to D$! Ale jak mogą go ostatecznie schwytać? Wystarczy przekazać gończemu jeszcze jedną instrukcję: ma on poruszać się po bokach trójkąta DFB tylko zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Nie zmienia to jego zdolności do utrzymywania złodzieja w ruchu i zmuszania go do zmiany punktów środkowych, ale w ten sposób gończy w końcu go dopadnie, gdy ten zacznie już poruszać się w cyklu. To kończy uzasadnienie, że w tym przypadku policjanci mają strategię wygrywającą.

Zauważmy, że wbrew swojej nazwie gończy może poruszać się dowolnie wolno. Musi jednak cechować się niemałą wytrwałością.

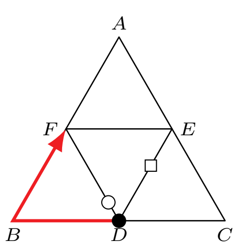
Udowodnimy teraz, że dla $\kappa > 3$ to złodziej jest na wygranej pozycji (przy odpowiednim początkowym ustawieniu). Zasadniczo jego strategia polega na rozpoczęciu w jednym z punktów D, E, F i przechodzeniu do innego z tych punktów za każdym razem, gdy zbliży się do niego któryś z policjantów. Spróbujmy opracować szczegóły tego podejścia.

Załóżmy, że złodziej zaczyna w węźle D. Będzie tam czekał, dopóki jeden z policjantów (ponownie nazwijmy go gończym) nie zbliży się do niego na odległość mniejszą niż, powiedzmy, $\varepsilon = 0{,}2$ (zakładamy $|EF| = 1$). Wtedy złodziej próbuje przejść do E lub F. Bez straty ogólności załóżmy, że gończy zbliża się do złodzieja ze strony punktów B lub F. Przyjmijmy, że złodziej pokonuje odległość $|EF|$ w minutę. Rozważmy następujące przypadki:



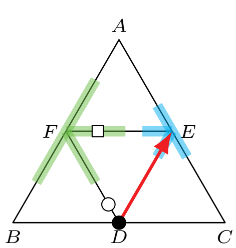
Rys. 5. Czarny punkt przedstawia złodzieja, zaś białe punkty – policjantów (gończy jest oznaczony kółkiem)

(I) Jeśli drugi policjant uniemożliwia złodziejowi bezpośrednie przejście do F, to krawędź $D{-}E$ jest pusta, a zatem złodziej może dotrzeć do E w ciągu minuty – czyli szybciej niż każdy z policjantów (rys. 5).
(II) Jeśli drugi policjant znajduje się na krawędzi $D{-}E$, to złodziej może dotrzeć do F w ciągu dwóch minut, zanim dotrze tam którykolwiek z policjantów (rys. 6). Zauważmy, że jeśli gończy znajduje się na odcinku BD, to złodziej może dotrzeć do F w ciągu zaledwie jednej minuty, ale nie ma to znaczenia dla naszej analizy.



Rys. 6

(III) W pozostałych przypadkach złodziej może bezpośrednio dotrzeć do E w minutę i do F maksymalnie w 2 minuty. Zauważmy, że gończy (który początkowo znajduje się blisko D) potrzebuje więcej niż 2 minuty, aby dotrzeć do dowolnego z tych punktów. Jeśli zaś chodzi o drugiego policjanta, rysunek 7 przedstawia dwa zbiory – jasnoniebieski to zbiór punktów, z których można dotrzeć do E w minutę, a jasnozielony to zbiór punktów, z których można dotrzeć do F w 2 minuty. Jasno widać, że przy założeniu $\kappa > 3$ te dwa zbiory nie przecinają się. Zatem złodziej może wybrać jeden z tych punktów, mając pewność, że dotrze tam przed drugim policjantem.



Rys. 7

Oczywiście, jeśli złodziej może raz dokonać zmiany punktu środkowego, to może tak robić w nieskończoność. Możemy więc stwierdzić, że złodziej ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1$ i $\kappa \geqslant 1$ lub $n = 2$ i $\kappa > 3$. Rzecz jasna, problem ten można uogólnić na inne kształty wiosek, takie jak siatka 2×2 czy nawet siatka $N \times M$. Zachęcamy Czytelnika do przeanalizowania podobnych strategii dla tych przypadków.