Obroty o pewne szczególne kąty

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

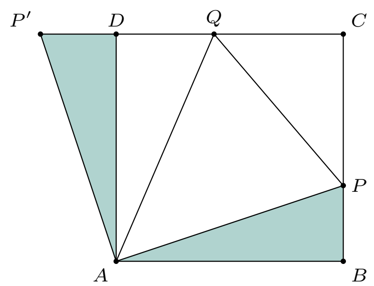
W kąciku nr 74 (Δ^2_{25}) pisałem o symetrii środkowej, która jest tym samym co obrót o kąt 180° wokół środka symetrii. Tym razem będzie o obrotach o kąty 90° i 60°. Ogólna zasada stosowania obrotów w rozwiązywaniu zadań jest następująca: obracamy pewną część rysunku w taki sposób, żeby ją dopasować w innym miejscu.

Dla ścisłości – wszystkie figury podajemy tu z kolejnością wierzchołków przeciwną do ruchu wskazówek zegara i również w tym kierunku wykonujemy obroty.

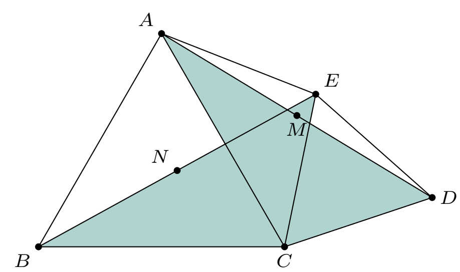
Przykład 1. W kwadracie $ABCD$ punkty P i Q leżą, odpowiednio, na bokach BC i CD, przy czym $|\sphericalangle PAQ| = 45^\circ$ (rys. 1). Udowodnić, że $|BP| + |DQ| = |PQ|$.

Rozwiązanie. Obróćmy trójkąt ABP wokół punktu A o kąt 90° – otrzymamy trójkąt ADP' przystający do ABP. Zachodzą równości $|\sphericalangle ADQ| = |\sphericalangle ADP'| = 90^\circ$, więc $|P'Q| = |DP'| + |DQ| = |BP| + |DQ|$. Z drugiej strony $|PQ| = |P'Q|$, gdyż trójkąty APQ i AQP' są przystające (bkb).

Obrót o 60° można wykorzystać do weryfikacji, czy dany trójkąt jest równoboczny. Trójkąt XYZ jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy któryś z punktów X, Y, Z jest obrazem drugiego w obrocie o 60° względem trzeciego. Można sformułować analogiczną zasadę dla równoramienności trójkąta prostokątnego, a nawet dowolnego.



Rys. 1



Rys. 2

Jeszcze jedna wskazówka ogólna. Jeśli w danej konfiguracji geometrycznej znajdują się dwie przystające figury, to zawsze warto sprawdzić, co nam daje izometria (na przykład obrót) przekształcająca jedną z nich w drugą.

Przykład 2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty M i N są środkami przekątnych, odpowiednio, AD i BE (rys. 2). Wykazać, że trójkąt CMN jest równoboczny.

Rozwiązanie. Trójkąty ACD i BCE są przystające (bkb), pierwszy z nich jest obrazem drugiego w obrocie o 60° wokół punktu C. Ten sam obrót przekształca punkt N w punkt M, więc trójkąt CMN jest równoboczny.

Zadania

1. Na bokach trójkąta ABC zbudowano kwadraty $BPQC$ i $CRSA$. Punkty K i L są środkami odcinków, odpowiednio, BR i AQ. Wykazać, że trójkąt CKL jest prostokątny równoramienny.
2. Częścią wspólną kwadratów $ABCD$ i $APQR$ jest punkt A. Punkt M jest środkiem odcinka DP. Udowodnić, że $AM \perp BR$.
3. W kwadracie $A_1A_2A_3A_4$ znajduje się punkt P. Prosta ℓ_i przechodzi przez punkt A_i i jest prostopadła do $A_{i+1}P$ dla $i = 1, 2, 3, 4$ (przyjmujemy $A_5 = A_1$). Udowodnić, że proste ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ℓ_4 przecinają się w jednym punkcie.
4. W trójkącie ABC dana jest środkowa CM i wysokość CD. Przez dowolny punkt P poprowadzono proste prostopadłe do AC, BC i MC, które przecinają prostą CD w punktach, odpowiednio, X, Y, N. Udowodnić, że punkt N jest środkiem odcinka XY.
5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CPD| = 120^\circ$. Udowodnić, że środki odcinków AB, BC, CD wyznaczają trójkąt równoboczny.
6. Udowodnić, że wewnątrz trójkąta równobocznego ABC wszystkie punkty X spełniające równość $|AX|^2 + |BX|^2 = |CX|^2$ leżą na jednym okręgu.

Wskazówki do zadań

1. Porównaj z przykładem 2.
2. Rozważmy (przystające!) równoległoboki $ADYP$ i $BARX$. Obrót o 90° wokół środka kwadratu $ABCD$ przeprowadza pierwszy z nich w drugi, więc obrazem prostej AY w tym obrocie jest prosta BR.
3. Po obrocie o kąt 90° wokół środka danego kwadratu prosta ℓ_i przechodzi w prostą $A_{i+1}P$. Skoro po obrocie wszystkie cztery proste mają punkt wspólny (P), to przed obrotem też tak musiało być.
4. Przez punkty primowane oznaczmy obrazy w obrocie o 90° punktów z zadania. Trójkąt $X'Y'P$ jest podobny do trójkąta ABC, bo ma odpowiednie boki równoległe do boków tego trójkąta. Prosta PN' zawiera środkową trójkąta $X'Y'P$ (dlaczego?), więc punkt N' jest środkiem odcinka $X'Y'$.
5. Trójkąt APC po obrocie o 120° przechodzi w trójkąt BPD, więc $|AC| = |BD|$ oraz kąt ostry między nimi ma 60°.
6. Niech X będzie punktem spełniającym warunki zadania. Obróćmy trójkąt ABX o 60° wokół punktu A – otrzymamy trójkąt ACX'. Na mocy twierdzenia Pitagorasa $|\sphericalangle CX'X| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AX'C| = 150^\circ$.