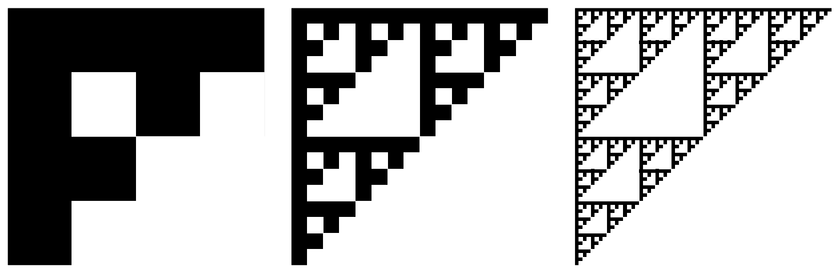
Wymiar fraktalny Hausdorffa zbioru Smitha $\mathcal{S}_3$ jest równy $\dim_H(\mathcal{S}_3) = \frac{\lg 8}{\lg 3} \approx 1{,}89 < 2$, a $\dim_H([0,1]^2) = 2$. Czym są więc zbiory o wymiarze większym od jedności, ale mniejszym od dwóch? Czy to, co otrzymaliśmy, to jeszcze powierzchnia?

Dodatkowo prawa dolna granica powstałego zbioru jest wersją krzywej płatka śniegu (o nieskończonej długości) opublikowanej przez Helge von Kocha w 1904 roku.

Patrząc na opisane w artykule konstrukcje, nabieramy szacunku do pozornie prostych pytań: *co to jest linia? co to jest powierzchnia?* Odpowiedź na każde z nich... wcale nie jest łatwa!

I na koniec ciekawostka. Jeśli wyżej opisaną płaską konstrukcję Smitha wykonamy dla $m = 2$, to otrzymamy... wersję trójkąta Sierpińskiego (!), który został opublikowany w 1915 roku (rys. 5).



Rys. 5. Druga, czwarta i szósta iteracja konstrukcji płaskiego zbioru Smitha dla $(m = 2)$

Wymiar fraktalny Hausdorffa trójkąta Sierpińskiego $\mathcal{T}$ jest równy $\dim_H(\mathcal{T}) = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx 1{,}58 < 2$.

Ale w 1875 roku Wacława Sierpińskiego nie było jeszcze na świecie! Ach, co by to było, gdyby Smith miał komputer...

Literatura

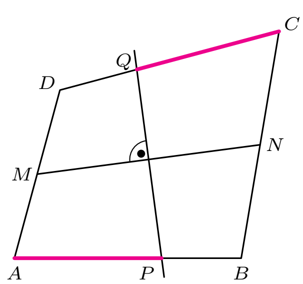
[1] H.J.S. Smith, „On the integration of discontinuous functions”, Proc. London Math. Soc. (1) 6 (1875), 140–153.

[2] G. Cantor, „Uber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten”, V, Math. Ann. 21 (1883), 545–591.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1810. Na szachownicy o wymiarach 8×8 ustawiono osiem wież tak, aby żadne dwie wieże nie atakowały się wzajemnie. Pola szachownicy są rozdzielone pomiędzy wieże w następujący sposób: każde pole należy do najbliższej atakującej je wieży (przyjmujemy przy tym, że wieża atakuje też pole, na którym się znajduje). W przypadku gdy dwie atakujące dane pole wieże są w równej odległości od niego, każda z nich posiada połowę pola. Udowodnić, że dla każdej wieży całkowita powierzchnia posiadanych przez nią pól jest taka sama.



M 1811. W czworokącie wypukłym $ABCD$ boki AB i CD są równej długości, a punkty M i N są środkami AD i BC. Symetralna odcinka MN przecina boki AB i CD, odpowiednio, w punktach P i Q. Udowodnić, że $AP = CQ$.

M 1812. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$(y+1)f\big(yf(x)\big) = yf\big(x(y+1)\big).$$

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1115. Dwie jednakowe, wykonane z dielektryka kulki, o promieniu r każda, umieszczono w odległości R od siebie, przy czym $R \gg r$. Na jedną z nich wprowadzono ładunek q. Następnie odległość między kulkami zwiększono k razy. Jaki ładunek, Q, należy wprowadzić na jedną z nich po rozsunięciu, aby siła, z jaką na siebie oddziałują, była w obu przypadkach taka sama?

F 1116. Poniżej jakiej długości fale dźwiękowe w gazie podlegają silnemu tłumieniu?

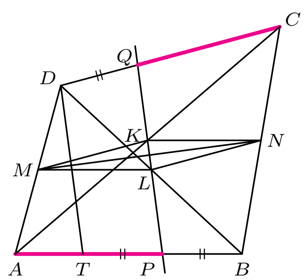
Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 13

Rozwiązanie zadania M 1810.

Zauważmy, że każda wieża atakuje łącznie 15 pól: 7 pól w kolumnie i 7 pól w rzędzie, w którym stoi, plus pole, na którym stoi. Wybierzmy dowolnie wieżę A stojącą na polu a. Atakowane przez A pola (poza a) połączymy w pary w następujący sposób: dla każdej wieży B stojącej na polu $b \neq a$ parujemy pola (c, d) atakowane jednocześnie przez A i B. Zauważmy, że w ramach każdej takiej pary: albo oba pola c i d należą połowicznie do A (jeśli a, b, c i d tworzą kwadrat), albo dokładnie jedno z nich należy w całości do A, a drugie do B (w przeciwnym przypadku). W rezultacie każda wieża posiada w sumie 8 pól: pole, na którym stoi, i połowę z pozostałych 14 pól.

Rozwiązanie zadania M 1811.



Niech K i L będą środkami, odpowiednio, przekątnych AC i BD. Wtedy KN i LM są odpowiednio liniami środkowymi trójkątów ABC i ABD. Zatem czworokąt $MKNL$ jest równoległobokiem.

Ponadto z równości $AB = CD$ wynika, że $NK = NL$, czyli $MKNL$ jest rombem. W szczególności punkty K i L leżą na symetralnej odcinka MN, czyli na prostej PQ. Dodatkowo $\sphericalangle APQ = \sphericalangle NKL = \sphericalangle NLK = \sphericalangle DQP$.

Poprowadźmy prostą równoległą do PQ przechodzącą przez punkt D. Niech T będzie punktem przecięcia tej prostej z prostą AB. Z twierdzenia Talesa łatwo dostajemy, że $BP = PT$. Ponadto $TPQD$ jest trapezem o równych kątach przy wierzchołkach P i Q, czyli jest trapezem równoramiennym. W szczególności $QD = PT = BP$, skąd $AP = CQ$.

Rozwiązanie zadania M 1812.

Odpowiedź: $f(x) \equiv 0$, $f(x) = x$.

Kładąc $y = 0$, dostajemy, że $f(0) = 0$. Jeśli $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \neq 0$, to kładąc $x = x_0$, dostaniemy, że $yf(x_0(y+1)) = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc $f \equiv 0$ – i jest to pierwsze rozwiązanie równania.

Załóżmy teraz, że $f(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ mamy $f(a) \neq a$. Połóżmy $x = a$ i $y = \frac{a}{f(a)-a}$, wtedy

$$\frac{f(a)}{f(a)-a} \cdot f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right) = \frac{a}{f(a)-a} \cdot f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right).$$

Zauważmy jednak, że $f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right) \neq 0$, gdyż $\frac{af(a)}{f(a)-a} \neq 0$, zatem dzieląc obie strony powyższej równości przez $f\left(\frac{af(a)}{f(a)-a}\right)$, dostajemy równość

$$\frac{f(a)}{f(a)-a} = \frac{a}{f(a)-a},$$

z której oczywiście wynika, że $f(a) = a$ – sprzeczność z założeniem. Wobec tego f jest identycznością.

Rozwiązanie zadania F 1115.

Pod wpływem pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{R})$ ładunku q następuje polaryzacja ładunków kulki nienaładowanej i indukuje się w niej dipolowy moment elektryczny $\vec{d}$ (wektor $\vec{d}$ ma zwrot od ujemnego do dodatniego ładunku dipola) wartości proporcjonalnej do pola $\vec{d} \propto \vec{E}(\vec{R})$. Energia potencjalna U dipola umieszczonego w polu elektrycznym wynosi: $U = -\vec{d} \cdot \vec{E}$, a siła $\vec{F}$ działająca na dipol równa jest minus gradient energii potencjalnej U: $\vec{F} = -\nabla U$. Wektor $\vec{R}$, pole $\vec{E}(\vec{R})$ oraz wektor $\vec{d}$ są równoległe i zwrócone od dodatniego ładunku q – w takim przypadku problem staje się jednowymiarowy i gradient można zastąpić zwykłym różniczkowaniem względem R. Mamy więc:

$$\vec{E} \propto \frac{q\vec{R}}{R^3}; \quad \vec{d} = \alpha\vec{E}; \quad U = -\alpha E^2 \propto -\frac{q^2}{R^4},$$

a więc

$$F \propto \frac{d}{dR}\left(\frac{q^2}{R^4}\right) \propto -\frac{q^2}{R^5}.$$

Po k-krotnym zwiększeniu odległości między kulkami siła ich oddziaływania nie zmieni się, jeśli $Q^2 = qk^5$, czyli:

$$Q = k^{5/2} = k^2\sqrt{k}.$$

Niezależnie od znaku ładunku q (Q) kulki się przyciągają.

Rozwiązanie zadania F 1116.

Rozchodzenie się dźwięku w gazie polega na propagacji zgęszczeń i rozrzedzeń gazu. Taka propagacja jest możliwa, gdy długość fali λ jest większa od średniej odległości pokonywanej przez cząsteczki gazu między kolejnymi zderzeniami w ich ruchu termicznym. Oznacza to, że fale o długościach mniejszych od średniej drogi swobodnej l cząsteczek są silnie tłumione. Oszacujmy wartość średniej drogi swobodnej w gazie o gęstości n (liczba cząsteczek w 1 m^3 gazu), gdy średnica cząsteczki wynosi d (przyjmujemy, że cząsteczki są w przybliżeniu kuliste):

$$l \sim \frac{1}{\pi d^2 n}$$

– zderzenie następuje, gdy środki cząsteczek znajdą się w odległości mniejszej niż d. W powietrzu, w warunkach normalnych $l \approx 7 \cdot 10^{-8}$ m, co odpowiada częstości dźwięku $f \approx 5 \cdot 10^9$ Hz.