# Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2025

## Zadania z matematyki nr 897, 898

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**897.** Czworokąt wypukły $ABCD$ ma obwód długości $p$ oraz przekątne długości $m$ i $n$. Punkt $E$ jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCE$. Udowodnić, że $DE \leqslant p - m - n$.

**898.** Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych $m, n \geqslant 1$, dla których wielomian $W(x) = x^m + x^n + 1$ jest podzielny przez trójmian $T(x) = x^2 + x + 1$.

*Zadanie 898 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.*

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2024

Przypominamy treść zadań:

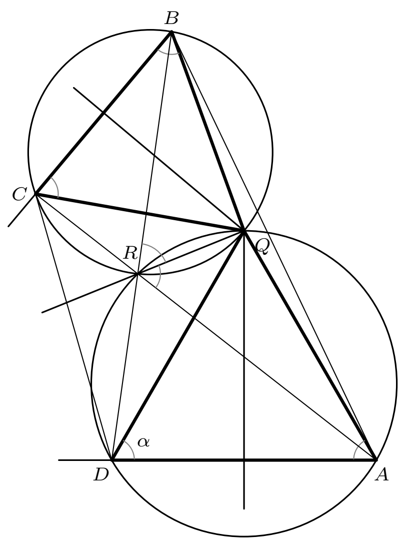
**889.** Ciąg $(a_1, \ldots, a_N)$, długości $N$, ma wyrazy $a_k \in \{2, 3, 5\}$, z sumą $a_1 + \ldots + a_N = A$. Niech $b_k = a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}$ (gdzie, cyklicznie, $a_{N+i} = a_i$). Zakładamy, że każda z liczb $b_1, \ldots, b_N$ dzieli się przez 30. Przyjmując jako znane wartości $N$, $A$ (dla których istnieje co najmniej jeden ciąg $(a_k)$ o podanych własnościach) wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $B = b_1 + \ldots + b_N$.

**890.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w punkcie $P$; boki $BC$ i $DA$ nie są równoległe, a ich symetralne przecinają się w punkcie $Q$ (różnym od $P$), leżącym wewnątrz czworokąta. Trójkąty $BQC$ i $DQA$ są podobne. Udowodnić, że prosta $PQ$ zawiera dwusieczne kątów $APB$ i $CPD$.

**889.** Podzielność $30|b_k$ oznacza, że w każdej czwórce kolejnych wyrazów $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ są obecne liczby $2, 3, 5$ oraz – powtórnie – jeszcze jedna z nich; nazwijmy ją $c_k$. Wówczas $b_k = 30c_k$, zaś $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} = 10 + c_k$. Stąd

$$B = \sum_{k=1}^{N} b_k = 30 \sum_{k=1}^{N} c_k = 30 \sum_{k=1}^{N} (a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} - 10) = 30(4A - 10N).$$

Jest to jedyna możliwa wartość sumy $B$.




**890.** Z określenia $Q$ wynika, że trójkąty podobne $BQC$ i $DQA$ są równoramienne: $QB = QC$, $QD = QA$. Oznaczmy $\sphericalangle QBC = \sphericalangle QCB = \sphericalangle QAD = \sphericalangle QDA = \alpha$. Niech $R$ będzie drugim (poza $Q$) punktem przecięcia okręgów opisanych na tych trójkątach. Przyjmijmy (b.s.o.), że proste $BC$ i $DA$ przecinają się w punkcie leżącym na półprostych $BC^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$; wówczas punkt $R$ leży w obszarze kąta wypukłego $CQD$ (nie jest możliwe, by punkt $C$ lub $D$ leżał na „krótkim" łuku $QR$ jednego z rozważanych okręgów, bo to by się kłóciło z wypukłością czworokąta $ABCD$). Mamy więc konfigurację, jak na rysunku.

W okręgach $BQC$ i $DQA$ widzimy kąty wpisane:

$$\sphericalangle BRQ = \sphericalangle BCQ = \alpha, \quad \sphericalangle CRQ = \pi - \sphericalangle CBQ = \pi - \alpha,$$
$$\sphericalangle ARQ = \sphericalangle ADQ = \alpha, \quad \sphericalangle DRQ = \pi - \sphericalangle DAQ = \pi - \alpha.$$

Z pierwszej i czwartej równości wynika, że punkt $R$ leży na odcinku $BD$; zaś z drugiej i trzeciej – że $R$ leży na odcinku $AC$. To znaczy, że $R$ jest punktem $P$ z treści zadania. Równości pierwsza z trzecią pokazują, że prosta $QR$ połowi kąt $ARB$; zaś druga z czwartą – że ta prosta połowi kąt $CRD$. Zważywszy, że $R = P$, mamy to, co należało udowodnić.

Inna metoda (szkic): stosujemy inwersję o środku $Q$ (i dowolnie ustalonym promieniu dodatnim). Półproste $QA^{\rightarrow}$, $QB^{\rightarrow}$, $QC^{\rightarrow}$, $QD^{\rightarrow}$, $QP^{\rightarrow}$ przechodzą każda na siebie. Obrazami punktów $A, B, C, D, P$ są punkty, które oznaczymy $A^*, B^*, C^*, D^*, P^*$, leżące odpowiednio na tych półprostych. W mocy pozostają równości $QB^* = QC^*$, $QD^* = QA^*$. Obrazem prostej $AC$ jest okrąg $QA^*C^*$, zaś prostej $BD$ – okrąg $QB^*D^*$ (każdy z nich z usuniętym punktem $Q$). Punkt $P^*$ leży na obu okręgach.

Mamy udowodnić, że prosta $QP$ tworzy równe kąty z prostymi $AC$ i $BD$. Inwersja zachowuje równość kątów, więc wystarczy wykazać, że prosta $QP^*$ tworzy równe kąty z okręgami $QA^*C^*$ i $QD^*B^*$. Ponieważ $\sphericalangle B^*QC^* = \sphericalangle D^*QA^* =: \varphi$, obrót o kąt $\varphi$ wokół $Q$ przenosi trójkąt $QA^*C^*$ na trójkąt $QD^*B^*$. Zatem te trójkąty są przystające – okręgi na nich opisane też są przystające – są więc symetryczne względem wspólnej cięciwy $QP^*$. Stąd wymagana równość kątów i teza zadania.

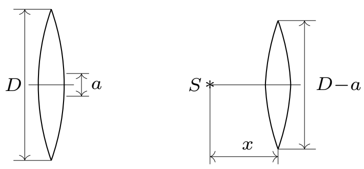
# Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2025

## Zadania z fizyki nr 794, 795

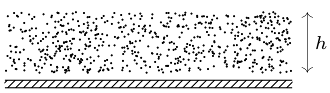
*Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**794.** Z soczewki skupiającej o ogniskowej $f = 50$ cm i średnicy $D = 5$ cm wycięto środkowy pasek o szerokości 5 mm, a pozostałe części złożono ze sobą (rys. 1). W odległości $x = 75$ cm od soczewki umieszczono punktowe źródło światła monochromatycznego $S$. Korzystając z przybliżenia małych kątów, znaleźć maksymalną liczbę prążków obrazu interferencyjnego, jaka może powstać na ekranie za soczewką. Długość fali świetlnej $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m.



Rys. 1

**795.** Izolowaną metalową początkowo nienaładowaną płytkę oświetlano w czasie $\tau$ światłem nadfioletowym. W wyniku tego z płytki wyleciała chmura elektronów, których prędkość początkowa była prostopadła do płytki i miała wartość $v_0$. Całkowita liczba elektronów, które wyleciały z jednostki powierzchni, wynosi $n$, elektron ma ładunek $e$ i masę $m$. Znaleźć grubość chmury $h$ po czasie $t$ od zakończenia naświetlania (rys. 2).

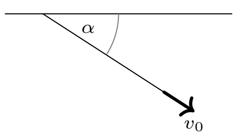


Rys. 2

## Rozwiązania zadań z numeru 11/2024

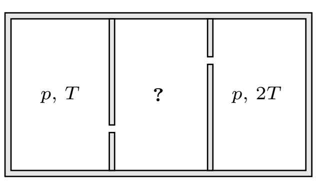
Przypominamy treść zadań:

**786.** Koralik o masie $M$ może ślizgać się bez tarcia po prostym poziomym pręcie. Do koralika przywiązana jest lekka nierozciągliwa nitka o długości $l$. Nitkę ciągniemy za swobodny koniec tak, że jego prędkość przez cały czas skierowana jest wzdłuż nitki i ma wartość $v_0$ (rys. 3). Jaką siłą ciągniemy w chwili, gdy nitka tworzy z prętem kąt $\alpha$? Podczas ruchu nitka znajduje się w płaszczyźnie poziomej.



Rys. 3

**787.** Nieprzewodzące ciepła naczynie połączone jest za pomocą dwóch małych jednakowych otworków z dwoma pojemnikami zawierającymi hel w stanie gazowym (rys. 4). W obu pojemnikach podtrzymywane jest jednakowe ciśnienie $p$, w jednym z nich podtrzymywana jest temperatura $T$, w drugim $2T$. Znaleźć ciśnienie i temperaturę w środkowym naczyniu w stanie równowagi.



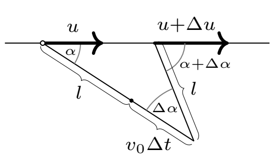
Rys. 4

**786.** Nić jest nierozciągliwa, zatem prędkości wszystkich jej punktów w danej chwili są jednakowe. Gdy kąt między nitką a prętem wynosi $\alpha$, prędkość koralika jest równa $u = v_0/\cos\alpha$. Jego przyspieszenie:

$$a = du/dt = u \operatorname{tg}\alpha (d\alpha/dt). \tag{1}$$

W małym przedziale czasowym $\Delta t$ koralik przebywa drogę $u\Delta t$, koniec nici przemieszcza się o $v_0\Delta t$ (rys. 5). Zgodnie z twierdzeniem sinusów $u\Delta t/\sin(\Delta\alpha) = l/\sin\alpha$. Uwzględniając, że kąt $\Delta\alpha$ jest mały, otrzymujemy $d\alpha/dt = u\sin\alpha/l$ i zgodnie z (1) $a = (v_0\sin\alpha)^2/(l\cos^3\alpha)$. Szukana siła, jaką ciągniemy koralik, dana jest wzorem:

$$F = Ma/\cos\alpha = M(v_0\sin\alpha)^2/(l\cos^4\alpha).$$



Rys. 5

**787.** W stanie równowagi liczba cząsteczek w środkowym naczyniu nie zmienia się, czyli liczby cząsteczek wpadających do tego naczynia w jednostce czasu z lewej i prawej strony oraz opuszczających je są sobie równe:

$$N_1 + N_2 = N. \tag{2}$$

$N_1$ jest proporcjonalne do liczby cząsteczek w jednostce objętości $n_1$ w lewym naczyniu oraz do średniej prędkości ich ruchu cieplnego $v_1$, która z kolei jest proporcjonalna do $\sqrt{T}$. Z równania Clapeyrona $n_1 \sim p/T$, zatem $N_1 = \alpha p/\sqrt{T}$, $\alpha$ to współczynnik proporcjonalności. Analogicznie $N_2 = \alpha p/\sqrt{2T}$, $N = 2\alpha p_x/\sqrt{T_x}$, gdzie $p_x$ jest szukanym ciśnieniem, a $T_x$ temperaturą w środkowym naczyniu. Podstawiając otrzymane wyrażenia do (2), otrzymujemy równanie:

$$p/\sqrt{T} + p/\sqrt{2T} = 2p_x/\sqrt{T_x}. \tag{3}$$

W stanie równowagi nie zmienia się również całkowita energia cząsteczek w środkowym pojemniku. Średnia energia przypadająca na cząsteczkę jest proporcjonalna do temperatury, zatem $N_1 T + N_2 2T = 2NT_x$,

$$p\sqrt{T} + p\sqrt{2T} = 2p_x\sqrt{T_x}. \tag{4}$$

Rozwiązując układ równań (3), (4), otrzymujemy:

$$T_x = T\sqrt{2}, \qquad p_x = p\big(\sqrt{2}+1\big)/2\sqrt[4]{2}.$$

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.