John von Neumann, mucha i szereg geometryczny

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Jubileuszowy kącik zobowiązuje do czegoś wyjątkowego.

W biografii Johna von Neumanna [∗] można znaleźć anegdotę związaną z następującym zadaniem i jego dwoma rozwiązaniami.

Zadanie. Dwaj rowerzyści znajdują się na tej samej drodze w odległości 20 km i zmierzają w swoim kierunku, każdy z prędkością 10 km/h. Mucha startująca od jednego rowerzysty leci w kierunku drugiego z prędkością 15 km/h. Po dotarciu do niego mucha zawraca i kontynuuje lot w kierunku pierwszego, i tak dalej. Ile kilometrów przebędzie mucha, zanim rowerzyści się spotkają?

W obu rozwiązaniach przyjmiemy, jak to się zwykle czyni, że mucha i rowerzyści są punktami materialnymi, choć dla tych drugich jest to nieco trudniejsze. Będziemy również wyrażać drogę, czas i szybkość zawsze w – odpowiednio – kilometrach, godzinach i kilometrach na godzinę.

Pierwszy sposób jest bardzo naturalny – będziemy sumowali długości $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kolejnych odcinków, które przebywa mucha pomiędzy „odbiciami” od rowerzystów. Przez A, B, M oznaczymy (zmieniające się) położenia rowerzystów oraz muchy. Załóżmy, że w pewnej chwili mucha wyrusza na n-ty odcinek swej drogi, ruszając od rowerzysty A, i przyjmijmy $s := |MB| = |AB|$. Suma prędkości M i B wynosi 25, spotkanie M i B nastąpi zatem po czasie $s/25$. Wtedy M przebędzie drogę $a_n = 15 \cdot s/25 = 3s/5$ (dla pewnego n), a odległość $|AB|$ spadnie do $s' = s/5$. Analogicznie obliczając, otrzymamy $a_{n+1} = 3s'/5 = a_n/5$, mamy więc do czynienia z ciągiem geometrycznym o ilorazie $q = 1/5$. Ponieważ $a_1 = 3 \cdot 20/5 = 12$, wystarczy skorzystać ze wzoru na sumę zbieżnego ciągu geometrycznego, by otrzymać $S = \frac{12}{1-1/5} = 15$.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu sztuczki. Mucha leci ze stałą szybkością 15 km/h aż do spotkania rowerzystów, które nastąpi po godzinie. Wynika z tego, że mucha przebędzie 15 kilometrów.

Według autora biografii John von Neumann po usłyszeniu tego zadania natychmiast udzielił prawidłowej odpowiedzi. To bardzo rozczarowało rozmówcę, który burknął pod nosem, że von Neumann znał sztuczkę już wcześniej i dlatego rozwiązał zadanie tak szybko. Ten zaś odpowiedział, że nie użył żadnej sztuczki, tylko zsumował wyrazy ciągu geometrycznego... Nie można wykluczyć, że była to prawda, biorąc pod uwagę to, jakim błyskotliwym rachmistrzem był John von Neumann. Wiemy jednak, że charakteryzowała go również wesołość i poczucie humoru, więc równie dobrze mógł być to niezwykle zręczny żart.

Tu muszę wtrącić z gorliwością telemarketera: uwaga na tanie podróbki! Różne wersje tej anegdoty krążą po Internecie. Trolle nie śpią! W mojej ulubionej (na pewnym portalu matematycznym, którego nazwę pominę) zamiast Johna von Neumanna występuje Leonhard Euler, a zamiast rowerów są pociągi; tylko mucha się zgadza – i lata, aż zostanie zmiażdżona w impecie zderzających się lokomotyw. A teraz uwaga: pociągi są odległe od siebie o 60 km i poruszają się z szybkością 60 km/h, a mucha – 20 km/h. Gdy Euler żył, pociągi poruszały się raczej z chyżością dryfu kontynentalnego (niektóre połączenia w Polsce do dziś trzymają się tej tradycji). *Musca domestica* osiąga 8 km/h, więc mucha z zadania była pewnie nieco poddenerwowana perspektywą całej tej zabawy, skoro wycisnęła 250% normy. Któż by nie był? Jednak tylko ona wyjdzie z tego cało! Zwróćmy uwagę, że mucha porusza się wolniej niż pociąg, więc nie zdąży dolecieć na czas do miejsca zderzenia. A co do przedstawionych wyżej rozwiązań – *pierwszy sposób* będzie nieskuteczny, gdyż mucha nie odbije się od drugiego pociągu; *drugi sposób* da nam odpowiedź, że do momentu zderzenia pociągów mucha przebędzie 10 km.

Matematycy kochają obliczanie różnych rzeczy na dwa sposoby – często przynosi to jakieś korzyści. Tu mamy dwa istotnie różne rozwiązania tego samego zadania. Przypuśćmy, że rowerzyści A i B znajdują się w odległości s i każdy z nich porusza się w stronę drugiego z szybkością v – spotkają się wówczas po czasie $\frac{s}{2v}$. Mucha zaczyna podróż z ramienia rowerzysty A i porusza się w kierunku czoła rowerzysty B z szybkością $V > v$.

Według *drugiego sposobu* mucha do momentu spotkania rowerzystów przebędzie dystans $S = \frac{sV}{2v}$.

W *pierwszym sposobie* otrzymamy $a_1 = \frac{sV}{V+v}$ oraz $q = \frac{V-v}{V+v}$. Porównajmy te wyniki: $\frac{a_1}{S} = \frac{2v}{V+v} = 1 - q$, wobec czego $S = \frac{a_1}{1-q}$. Wygląda znajomo? Oczywiście! Otrzymaliśmy przecież równość

$$\text{(G)} \qquad a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots = S = \frac{a_1}{1-q},$$

czyli właśnie wyprowadziliśmy w prostolinijny (a może prostoliniowy) sposób wzór na sumę nieskończonego, zbieżnego szeregu geometrycznego o ilorazie $q \in (0, 1)$.

Wzór (G) tradycyjnie wyprowadza się za pomocą obliczenia odpowiedniej granicy:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_1}{1-q},$$

czyli w istocie wykorzystujemy fakt, że $q^n \to 0$, gdy $|q| < 1$. W metodzie „fizycznej” obywamy się bez tego! Jest tylko jedna granica, ukryta w definicji

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k \Bigr).$$

Tej nie da się pominąć.

I tylko nikomu nie żal biednej muchy, której po tych karkołomnych eksperymentach potężnie zakręci się w głowie...

[∗] Norman Macrae, *John von Neumann: The Scientific Genius who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More*, 1992