

Rys. 2

Zachęcamy do zapoznania się z dwoma różnymi spojrzeniami na kosmologiczną inflację w artykułach Andrzeja Krasieńskiego i Krzysztofa Turzyńskiego w Δ_{16}^1 .

naturalnie, gdy inflaton zaczyna tłumione oscylacje wokół minimum potencjału w procesie zwanym *reheatingiem* (lub po polsku – odgrzaniem, jest to jednak nazewnictwo, za którym większość polskojęzycznych fizyków nie przepada) i przekazuje energię, którą zgromadził, pierwotnej plazmie wypełniającej Wszechświat. Dodatkowo podczas inflacji slow-roll przewidywana jest produkcja fal grawitacyjnych, która będzie mogła być zmierzona przez projektowany detektor LISA. Reheating może być też ważnym etapem produkcji niejednorodności we Wszechświecie – z których potem wyewoluowały wszystkie struktury, z nami włącznie – i pozostaje ciągłym tematem badań.

W czterdzięci lat po pierwszym zapostulowaniu paradygmatu inflacyjnego hipoteza inflacyjna nadal budzi kontrowersje wśród fizyków. Jej oponenti zarzucają jej przede wszystkim niefalsyfikowalność – jesteśmy w stanie dobrać parametry modelu inflacji do praktycznie każdego wyniku obserwacji kosmologicznych. Jej zwolennicy ripostują, że w prosty sposób wyjaśnia problemy pojawiające się w modelach kosmologicznych i zapewnia jeden mechanizm, który łączy ich rozwiązanie z powstawaniem struktur we Wszechświecie. Oczywiście wielka gęstość energii bardzo młodego Wszechświata jest daleko poza zasięgiem jakichkolwiek akceleratorów i poszukując odpowiedzi na pytania o to, co się działo wtedy, musimy uciekać się do hipotez – a hipoteza inflacyjna daje nam zwartą odpowiedź na wiele pytań.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1807. Dane są dwa ciągi arytmetyczne, a_1, a_2, \dots i b_1, b_2, \dots , składające się z liczb całkowitych dodatnich. Wiadomo, że $a_1 = b_1$ oraz dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ liczby a_n i b_n dają równe reszty z dzielenia przez n . Udowodnić, że te ciągi są identyczne.

M 1808. Dane są dwa ciągi liczb całkowitych dodatnich x_1, x_2, \dots, x_m oraz y_1, y_2, \dots, y_n , których sumy $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ i $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ są równe $s < nm$. Udowodnić, że w równości

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

można wykreślić część składników, zachowując jej prawdziwość.

M 1809. W czworobocianie $ABCD$ na ścianach BCD i ACD znajdują się, odpowiednio, punkty A' oraz B' takie, że

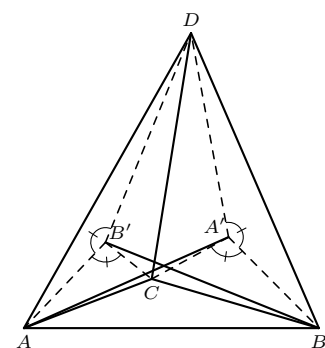
$$\sphericalangle AB'C = \sphericalangle AB'D = \sphericalangle BA'C = \sphericalangle BA'D = 120^\circ.$$

Wiadomo, że proste AA' i BB' przecinają się. Udowodnić, że odległości punktów A' oraz B' od prostej CD są równe.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1113. Planeta o masie m obiega Słońce po orbicie eliptycznej. W aphelium jej odległość od Słońca wynosi A , a w perihelium a . Ile wynosi moment pędu, L , tej planety? Masa Słońca równa jest M , a stała grawitacji G .

F 1114. W opisanym dalej układzie stojąca fala dźwiękowa może spełniać rolę siatki dyfrakcyjnej dla światła. Kuweta o przezroczystych, płaskich, równoległych ściankach jest wypełniona cieczą. Równoległe do ścianek kuwety w cieczy wzbudzona jest stojąca fala ultradźwiękowa o długości Λ . Wiązka światła laserowego o długości fali λ pada prostopadłe do ścianek kuwety i do wektora falowego ultradźwięku. Jaki warunek spełniają powstające za kuwetą prążki interferencyjne światła?



Rozwiązania na str. 24



Rozwiązanie zadania M 1807.

Skoro pierwsze wyrazy danych ciągów są takie same, wystarczy udowodnić równość ich różnic a i b . Z warunków zadania wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n liczba

$$b_n - a_n = (b_1 + (n-1)b) - (a_1 + (n-1)a) \\ = (n-1)(b-a)$$

jest podzielna przez n , co oznacza, że liczba $b-a$ jest podzielna przez n . Stwierdziliśmy więc, że liczba całkowita $b-a$ jest podzielna przez dowolną liczbę całkowitą dodatnią, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy $b-a=0$.



Rozwiązanie zadania M 1808.

Rozważmy okrąg o długości s i podzielmy go na równe łuki o długości l . Zaznaczmy na czerwono m punktów podziału okręgu na łuki o długościach x_1, x_2, \dots, x_m i kolorem niebieskim n punktów podziału okręgu na łuki o długościach y_1, y_2, \dots, y_n . Na podstawie zadania M 1806 z poprzedniego numeru pewne dwa łuki, $A_{i_1}A_{i_2}$ i $B_{j_1}B_{j_2}$, są równej długości. Usuając te długości z równości, zachowujemy jej prawdziwość.

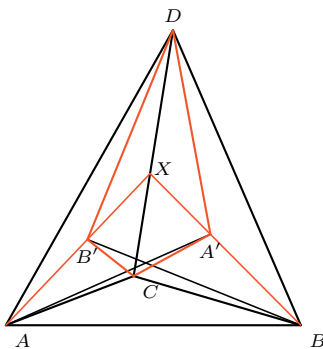


Rozwiązanie zadania M 1809.

Z warunków zadania wynika, że punkty A, A', B, B' leżą w tej samej płaszczyźnie, zatem proste BA' i AB' przecinają się w jednym punkcie X . Z równości kątów wynika, że proste te są dwusiecznymi kątów, odpowiednio, $\sphericalangle CA'D$, $\sphericalangle CB'D$. Zatem z twierdzenia o dwusiecznej dostajemy

$$\frac{CA'}{A'D} = \frac{CX}{XD} = \frac{CB'}{B'D},$$

a ponieważ $\sphericalangle CA'D = \sphericalangle CB'D = 120^\circ$, trójkąty $CA'D$ i $CB'D$ są podobne. Ponieważ CD jest wspólnym bokiem tych trójkątów, są one przystające. Oczywiście w tych przystających trójkątach odpowiadające im wysokości z wierzchołków A' i B' są równe.



Rozwiązanie zadania F 1113.

Skorzystamy z praw: zachowania energii i momentu pędu. W perihelium i w aphelium prędkość planety jest prostopadła do odcinka łączącego środek planety ze środkiem Słońca. Oznaczmy prędkości w aphelium i w perihelium, odpowiednio, jako v_A i v_a . Mamy:

$$L = mAv_A = mav_a,$$

czyli: $v_A = L/(mA)$ i $v_a = L/(ma)$, oraz

$$-\frac{GMm}{A} + \frac{mv_A^2}{2} = -\frac{GMm}{a} + \frac{mv_a^2}{2}.$$

Po skorzystaniu ze związków prędkości z momentem pędu otrzymujemy równanie:

$$-\frac{GMm}{A} + \frac{L^2}{2mA^2} = -\frac{GMm}{a} + \frac{L^2}{2ma^2}.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy odpowiedź:

$$L = m\sqrt{\frac{2GMAa}{A+a}}.$$



Rozwiązanie zadania F 1114.

Zmianom ciśnienia towarzyszą zmiany prędkości światła w cieczy. W związku z tym kolejne zgęszczenia i rozrzedzenia cieczy wywołane falą akustyczną będą działały jak szczeliny siatki dyfrakcyjnej. Przyjmijmy, że stojąca fala ultradźwiękowa wzbudzana jest w kierunku x . Przesunięcia cząstek cieczy w kierunku x (dźwięk to fala podłużna) opisywane są wówczas wzorem (suma dwóch fal biegnących o przeciwnych zwrotach wektorów falowych):

$$u(x, t) = u_0(\sin(\omega t - kx) - \sin(\omega t + kx)) \\ = 2u_0 \cos(\omega t) \sin(kx).$$

W powyższych wzorach $k = 2\pi/\Lambda$ oznacza długość wektora falowego, a ω kołową częstość fali. Zbadajmy rozkład prędkości:

$$v(x, t) = -2u_0\omega \sin(\omega t) \sin(kx).$$

Węzły fali ($v(x, t) = 0$) pojawiają się w punktach, dla których $kx = n\pi$ dla całkowitych n . Nie wszystkie te węzły są równoważne, bo jeśli przyjmiemy, że $-2u_0\omega \sin(\omega t) > 0$, to w węzłach odpowiadających nieparzystym n cząstki z obu stron poruszają się w kierunku węzła (zmiana znaku v z dodatniego na ujemny), a w węzłach o parzystym n oddalają się. Odległość kolejnych rozrzedzeń cieczy („szczeliny” siatki) wynosi więc Λ i jest taka sama jak w przypadku rozpraszania na fali biegnącej. Kolejne prążki interferencyjne pojawiają się więc pod kątami α do wiązki padającej spełniającymi warunek:

$$\Lambda \sin(\alpha) = m\lambda$$

z całkowitymi wartościami m .

Uwaga: Częstości ultradźwięków, rzędu MHz, są tak małe w porównaniu z częstościami fal świetlnych, że światło rozprasza się na fali ultradźwiękowej jak na nieruchomej siatce dyfrakcyjnej.

