



Symetria środkowa

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Na razie pozostajemy na płaszczyźnie – o symetrii środkowej w trzech wymiarach napiszę w innym odcinku.

Symetria środkowa na płaszczyźnie Π , względem pewnego punktu K , jest przekształceniem geometrycznym $S_K : \Pi \rightarrow \Pi$ o następującej własności: jeśli $Y = S_K(X)$, to $\overrightarrow{KY} = \overrightarrow{XK}$. Inaczej mówiąc, punkt K jest środkiem odcinka XY (również tego zdegenerowanego do punktu).

Dwukrotne złożenie tej samej symetrii środkowej jest identycznością na całej płaszczyźnie, więc przekształcenie to jest *inwolucją*. W szczególności wynika z tego, że symetria środkowa jest bijekcją.

Mówimy, że figura $\mathcal{F}$ ma *środek symetrii* K (lub że jest *środkowosymetryczna*), jeśli spełnia następujący warunek: jeżeli $X \in \mathcal{F}$, to $S_K(X) \in \mathcal{F}$. Inaczej – punkty figury $\mathcal{F}$ można podzielić na rozłączne pary z każdą parą (X, Y) , o tej własności, że punkt K jest zawsze środkiem odcinka XY . Przykładami figur środkowosymetrycznych są: odcinek, prosta, pas (część płaszczyzny pomiędzy parą prostych równoległych), okrąg i parzystokąt foremny.

Twierdzenie. Niech $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ będą figurami ze środkami symetrii, odpowiednio, K_1 i K_2 (jeśli środków symetrii jest więcej, to ustalamy dowolnie jeden z nich). Jeśli zachodzi co najmniej jeden z warunków:

- (1) $K_1 = K_2$ lub
- (2) $\mathcal{F}_2$ jest obrazem $\mathcal{F}_1$ w przesunięciu o $\overrightarrow{K_1K_2}$,

to figury $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ oraz $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ (o ile jest niepusta) mają środek symetrii, który jest środkiem odcinka K_1K_2 .

Dowód (1). Niech $K_1 = K_2 = K$. Niech $X \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ oraz $Y = S_K(X)$. Z definicji figury środkowosymetrycznej mamy $Y \in \mathcal{F}_1$ lub $Y \in \mathcal{F}_2$, więc $Y \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

Przypadek „ $\cap$ ” jest analogiczny.

Dowód (2). Przeprowadzimy dowód dla części wspólnej; w przypadku sumy jest podobnie. Niech $X \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ oraz $Y = S_K(X)$, przy czym K jest środkiem odcinka K_1K_2 . Połóżmy $Y_1 = S_{K_1}(X)$ oraz $Y_2 = S_{K_2}(X)$.

Odcinek KK_2 jest linią środkową w trójkącie XY_2 , więc $\overrightarrow{Y_2K} = 2\overrightarrow{KK_2} = \overrightarrow{K_1K_2}$. Wiemy, że $Y_2 \in \mathcal{F}_2$, a więc z poprzedniej równości wynika, że $Y \in \mathcal{F}_1$, bo $\mathcal{F}_2$ jest translacją $\mathcal{F}_1$ o $\overrightarrow{K_1K_2}$. Analogicznie dowodzimy, że $Y \in \mathcal{F}_2$.

Za pomocą tego twierdzenia można uzasadnić, że środki symetrii mają: równoległobok (część wspólna dwóch pasów o wspólnym środku), część wspólna lub suma dwóch kół o jednakowym promieniu, dowolna para prostych...

Jako przykład rozwiążemy zadanie pochodzące z bieżącej Olimpiady Matematycznej.

Zadanie. Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach przecinają się w punktach A, B . Punkty C, D, E, F leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym C i E leżą na o_1 , a D i F – na o_2 . Symetralne odcinków CD i EF przecinają prostą AB , odpowiednio, w punktach X i Y . Dowieść, że $|AX| = |BY|$.

Rozwiązanie. Oznaczmy środek odcinka AB przez K . Niech ℓ_1 będzie prostą CD , a ℓ_2 prostą środkowosymetryczną do ℓ_1 względem punktu K . Z twierdzenia wynika, że punkt K jest środkiem symetrii figury $\ell_1 \cup \ell_2 \cup o_1 \cup o_2$. Punkty C', D', E', F' , w których prosta ℓ' przecina dane okręgi, są obrazami punktów, odpowiednio, C, D, E, F w symetrii S_K . Czworokąt $EFC'D'$ jest trapezem równoramiennym (dlaczego?), więc symetralna odcinka $C'D'$ i symetralna odcinka EF to ta sama prosta. Jej obrazem w S_K jest symetralna odcinka CD , z czego wynika teza.

Zadania

Wskazówki do zadań
1. Te proste są obrazami prostych CM, DM, AM, BM w symetrii względem środka równoległoboku, więc ich punkt wspólny jest obrazem M .
2. Rozważmy symetrię środkową względem środka danego okręgu – obrazem prostej A_1P_1 będzie prosta prostopadła do BC , przechodząca przez $A_2, \dots$
Ciekawostka. Jeśli P_1 jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie, to P_2 jest jego ortocentrum, a okrąg z zadania – okręgiem dziewięciu punktów.
3. Udowodnić, że punkt symetryczny do B względem A leży jednocześnie na ω_2 i ω_3 .
4. Niech K będzie środkiem równoległoboku $PQRS$. Obrazem prostej p w symetrii S_K jest symetralna odcinka CD . Analogicznie jest z pozostałymi prostymi z zadania.

1. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt M różny od jego wierzchołków. Przez punkty A, B, C, D poprowadzono proste równoległe do, odpowiednio, CM, DM, AM, BM . Udowodnić, że te cztery proste przecinają się w jednym punkcie.
2. Pewien okrąg przecina boki BC, CA, AB trójkąta ABC w punktach, odpowiednio, A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 . Załóżmy, że istnieje punkt P_1 , którego rzutami prostokątnymi na proste BC, CA, AB są A_1, B_1, C_1 . Wykazać, że istnieje analogiczny punkt P_2 dla A_2, B_2, C_2 .
3. Okręgi ω_1 i ω_2 , o równych promieniach, są styczne w punkcie A . Okrąg ω_3 , o środku $O \in \omega_1$, jest styczny wewnętrznie do okręgu ω_1 w punkcie B . Udowodnić, że prosta AB przechodzi przez jeden z punktów przecięcia okręgów ω_2 i ω_3 .
4. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Punkty P, Q, R, S są środkami odcinków, odpowiednio, AB, BC, CD, DA . Prosta p przechodzi przez punkt P i jest prostopadła do CD ; analogicznie definiujemy proste q, r, s . Udowodnić, że te cztery proste przecinają się w jednym punkcie.