Klub 44 F

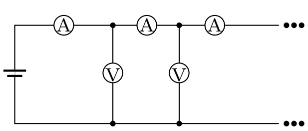
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2025

Zadania z fizyki nr 792, 793

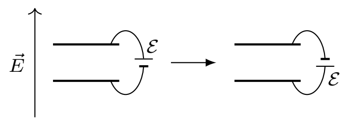
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

792. $N = 100$ jednakowych kulek o średnicy $d = 0{,}1$ mm znajduje się w ustawionym pionowo cylindrycznym naczyniu o podstawie $S = 1\ \mathrm{m}^2$ pod nieruchomym tłokiem, który znajduje się na wysokości $h = 1$ m. Kulki poruszają się chaotycznie ze średnią prędkością kwadratową $v_0 = 100$ m/s. Tłok zaczęto podnosić z prędkością $u = 1$ m/s i został on zatrzymany na wysokości $2h$. Jaka średnia prędkość kulek ustaliła się po długim czasie? Nie ma strat energii mechanicznej podczas zderzeń, nie uwzględniamy siły grawitacji.

793. Do źródła o sile elektromotorycznej $U = 1{,}5$ V i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym dołączono długi łańcuch jednakowych amperomierzy i taką samą liczbę jednakowych woltomierzy (rys. 1). Opór wewnętrzny amperomierza wynosi $r = 1\ \Omega$, woltomierza 10 kΩ. Jakie są wskazania pierwszego i drugiego amperomierza? Ile wynosi suma wskazań wszystkich amperomierzy oraz suma wskazań wszystkich woltomierzy w łańcuchu?



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 10/2024

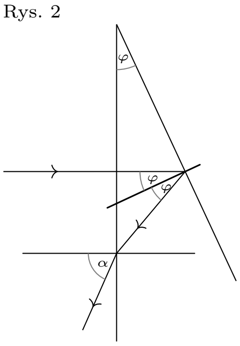
Przypominamy treść zadań:

784. Szklany pryzmat o małym kącie łamiącym φ umieszczono w pewnej odległości od cienkiej soczewki skupiającej o ogniskowej f tak, że jedna z powierzchni pryzmatu jest prostopadła do osi optycznej soczewki. Po drugiej stronie soczewki, w jej ognisku znajduje się punktowe źródło światła. Promienie odbite od pryzmatu po załamaniu w soczewce dają dwa obrazy źródła światła oddalone od siebie o d. Znaleźć współczynnik załamania szkła, z którego wykonano pryzmat.

785. Kondensator płaski, którego powierzchnia okładek jest dużo większa od odległości między nimi, podłączony jest do źródła o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i umieszczony w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu E. Linie pola są prostopadłe do powierzchni okładek kondensatora (rys. 2). Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić ten kondensator o kąt π wokół osi prostopadłej do wektora $\vec{E}$?

784. Musimy rozważyć dwa przypadki:

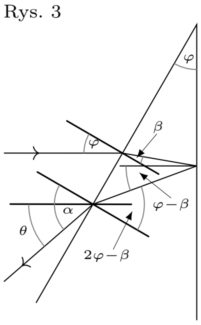
1) Ścianka pryzmatu bliższa soczewki jest prostopadła do jej osi optycznej (rys. 3).



Rys. 3

Równoległa wiązka promieni odbita od bliższej ścianki skupia się w ognisku soczewki, w którym znajduje się źródło. Promienie odbite od dalszej ścianki tworzą po wyjściu z pryzmatu wiązkę nachyloną pod kątem α do osi optycznej i skupiają się w płaszczyźnie ogniskowej, w odległości $d = f\,\mathrm{tg}\,\alpha$ od ogniska. Z prawa załamania $\sin\alpha/\sin(2\varphi) = n$.
W przybliżeniu małych kątów $d = f\alpha = 2\varphi n f$.

2) Ścianka pryzmatu dalsza od soczewki jest prostopadła do jej osi optycznej (rys. 4).



Rys. 4

Promienie odbite od bliższej ścianki są nachylone do osi optycznej pod kątem 2φ i po przejściu przez soczewkę tworzą obraz w płaszczyźnie ogniskowej, oddalonej od ogniska o $d_1 = f\,\mathrm{tg}\,(2\varphi)$. Promienie odbite od dalszej ścianki po wyjściu z pryzmatu tworzą wiązkę odchyloną w drugą stronę o kąt $\theta = \alpha - \varphi$ i po przejściu przez soczewkę skupiają się w płaszczyźnie ogniskowej w odległości $d_2 = f\,\mathrm{tg}\,\theta$ od ogniska. Spełnione są prawa załamania: $\sin\varphi/\sin\beta = n$ oraz $\sin\alpha/\sin(2\varphi-\beta) = n$. Odległość między obrazami $d = d_1 + d_2$.

W przybliżeniu małych kątów odległość między obrazami w obu przypadkach jest taka sama, a szukany współczynnik załamania

$$n = d/(2\varphi f).$$

785. Wypadkowe pole elektryczne wewnątrz kondensatora przed i po obrocie ma wartość $\mathcal{E}/d$, zatem energia pola w tym obszarze nie zmienia się. Zasada zachowania energii w rozważanym procesie ma postać

$$W_1 + W_2 = 0,$$

gdzie W_1 jest szukaną pracą sił zewnętrznych, a W_2 pracą źródła. Oznaczając przez E_1 i E_2 wartości pola elektrycznego wytworzonego przez ładunki na kondensatorze odpowiednio przed i po obrocie, a przez d odległość między okładkami, możemy napisać:

$$\mathcal{E} - E_1 d + Ed = 0, \qquad \mathcal{E} - E_2 d - Ed = 0,$$

stąd $E_1 = \mathcal{E}/d + E$, $E_2 = \mathcal{E}/d - E$.

Ładunki na okładkach o powierzchni S połączonych z dodatnim biegunem źródła przed i po obrocie wynoszą odpowiednio:

$$Q_1 = \varepsilon_0 S\,(\mathcal{E}/d + E)\,, \qquad Q_2 = \varepsilon_0 S\,(\mathcal{E}/d - E)\,.$$

Podczas obrotu z okładki dodatniej odpływa ładunek $\Delta Q = Q_1 - Q_2 = 2\varepsilon_0 SE$, a praca źródła jest ujemna: $W_2 = -2\varepsilon_0 E\mathcal{E}$. Szukana praca sił zewnętrznych wynosi

$$W_1 = 2\varepsilon_0 SE\mathcal{E}.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po zakończeniu
roku szkolnego 2023/24
i po sprawdzeniu zadań
780 ($WT = 3{,}01$), 781 ($WT = 3{,}31$)

Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5 – 43,19
Konrad Kapcia	Poznań	2 – 42,29
Jacek Konieczny	Poznań	40,87
Tomasz Wietecha	Tarnów	17 – 34,38
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3 – 27,49
Jan Zambrzycki	Białystok	4 – 26,81
Paweł Kubit	Kraków	17,21
Krzysztof Magiera	Łosiów	4 – 13,42
Piotr Adamczyk	Bydgoszcz	2 – 9,03
Ryszard Baniewicz	Włocławek	2 – 7,91
Michał Koźlik	Gliwice	5 – 6,54
Piotr Łaba	Biłgoraj	6,36
Sławomir Buć	Mystków	1 – 5,51
Marian Łupieżowiec	Gliwice	3 – 4,25
Leon Charkiewicz	Koszalin	3,85
Tomasz Rudny	Poznań	1 – 3,34
Hubert Pochłopień	Toruń	1,1
Wiktor Garczyński		0,66

Lista obejmuje uczestników ligi, którzy przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2022, 2023 lub 2024.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F w roku szkolnym 2023/2024

Dziewięć zadań z omawianego okresu uzyskało współczynnik trudności większy od trzech, a pięć mniejszy od dwóch.

Nikt nie rozwiązał poprawnie zadania **774** ($WT = 3{,}88$), gdzie należało znaleźć gęstość klocka w stanie równowagi trwałej, zanurzonego w wodzie tak, że jego powierzchnia boczna jest równoległa do powierzchni cieczy. Zadanie było dosyć pracochłonne i część uczestników nadesłało rozwiązania jedynie drugiego zadania z tej serii, co wpłynęło na jego współczynnik trudności. Nikt nie podjął próby rozwiązania sposobem „firmowym”, polegającym na zbadaniu momentów sił działających na klocek przy małym odchyleniu z położenia równowagi. Zaproponowane zostało porównanie położenia środków ciężkości klocka w różnych stanach równowagi, ale nie uwzględniono faktu, że podczas zanurzenia klocka przemieszczamy na powierzchnię wodę, której miejsce zajmuje zanurzona część klocka.

Maksymalnej możliwej oceny nie uzyskało żadne z rozwiązań zadania **776** ($WT = 3{,}56$). Koralik przymocowany do ustawionej pionowo obręczy za pomocą dwóch jednakowych poziomych sprężyn odchylono od położenia równowagi wzdłuż średnicy i puszczono. Zakładając brak poślizgu, należało znaleźć przyspieszenie obręczy w chwili początkowej. Jeden z uczestników podał dwa rozwiązania tego zadania. Jedno, w którym zastosował równania Lagrange’a, było poprawne. W drugim wykorzystał prawa ruchu obrotowego, zakładając, że obręcz i kulka tworzą jedną bryłę sztywną. Dodatkowy błąd spowodował, że wyniki obu rozwiązań były zgodne. Błąd polegający na założeniu, że obręcz i kulka mają jednakowe przyspieszenia, pojawił się też w kilku innych rozwiązaniach.

W zadaniu **781** ($WT = 3{,}31$) początkowo nieruchoma, naładowana cząstka poruszała się w polu nieruchomej cząstki naładowanej przeciwnie oraz w jednorodnym polu magnetycznym prostopadłym do linii łączącej cząstki w chwili początkowej. Znając minimalną odległość między cząstkami, należało znaleźć wartość wektora indukcji pola magnetycznego. Najwyżej ocenione zostało rozwiązanie **Konrada Kapci**, chociaż nie była to ocena maksymalna. Wypisał on równania ruchu cząstki we współrzędnych kartezjańskich, rozważył przypadki o innych warunkach początkowych i wykorzystując analizę numeryczną, zgadł poprawne rozwiązanie.

Zgodnie z tradycją trudności sprawiały zadania z termodynamiki. Nikt nie rozwiązał w pełni poprawnie zadania **779** ($WT = 3{,}15$), gdzie w izolowanym cieplnie naczyniu tłok był bardzo szybko podnoszony, a po ustaleniu się równowagi swobodnie opadał. Oba procesy nie były kwazistatyczne i należało korzystać z zasady zachowania energii, podczas gdy uczestnicy albo w jednym, albo w drugim procesie korzystali z równania $pV^{c_p/c_v} = \mathrm{const}$. Podobnie było z zadaniem **770** ($WT = 3{,}5$), w którym opróżnione i izolowane cieplnie naczynie zapełniane było szybko przez gaz z otoczenia. Jako jedyny poprawnie rozwiązał to zadanie **Tomasz Wietecha**.

T. Wietecha był też jedynym autorem ocenionego na jedynkę rozwiązania zadania **765** ($WT = 3{,}4$). Należało w nim znaleźć okres małych drgań obręczy nałożonej na poziomy nieruchomy walec, przy braku poślizgu między walcem i obręczą.

Zadanie **762** ($WT = 3{,}01$) bezbłędnie rozwiązał **Ryszard Baniewicz**. Pytanie było o minimalną energię fotonu potrzebną do utworzenia pary elektron-pozyton w pobliżu spoczywającego elektronu.

Zadanie **766** ($WT = 3{,}06$) dotyczyło oddziaływania połówek równomiernie naładowanej, nieprzewodzącej kuli. Jedynki otrzymali **Paweł Perkowski** i **Tomasz Wietecha**. W zadaniu **780** ($WT = 3{,}01$) rozważane było niesprężyste zderzenie kulek zawieszonych na jednakowych niciach. Bezbłędne rozwiązania przysłali **Marian Łupieżowiec** i **Tomasz Wietecha**.

Za rozwiązania tegorocznych zadań najwięcej jedynek zdobył **Tomasz Wietecha** (11), drugie miejsce zajął **Ryszard Baniewicz**, trzecie **Paweł Perkowski**. **Tomasz Rudny** został w tym roku członkiem klubu 44 F, przekraczając granicę 44 punktów, **Ryszard Baniewicz** przekroczył ją po raz drugi, **Marian Łupieżowiec** po raz trzeci, a **Tomasz Wietecha** siedemnasty!

Ciekawostką jest, że o rozwiązanie zadania **763** ($WT = 2{,}46$) z mechaniki punktu materialnego, za które maksymalne oceny otrzymały trzy osoby, jeden z uczestników poprosił sztuczną inteligencję, której wysiłek zakończył się niepowodzeniem. Zdecydowanie odradzam dalsze takie eksperymenty, bo nie o to w tej zabawie chodzi.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2025

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2023/24

Szymon Kitowski	41,11
Witold Bednarek	9–40,58
Mikołaj Pater	3–39,58
Krzysztof Zygan	1–39,38
Tomasz Wietecha	14–38,61
Andrzej Daniluk	2–37,89
Szymon Tur	35,35
Andrzej Kurach	3–33,24
Jędrzej Biedrzycki	32,29
Krzysztof Kamiński	3–30,48
Marian Łupieżowiec	1–29,87
Michał Warmuz	29,84
Marcin Kasperski	5–28,94
Marcin Małogrosz	4–27,82
Roksana Słowik	2–27,60
Janusz Olszewski	24–26,40
Janusz Wojtal	26,30
Grzegorz Wiączkowski	26,13
Błażej Żmija	2–25,48
Maciej Mostowski	1–22,90
Krzysztof Maziarz	1–22,58
Stanisław Bednarek	3–22,47
Marek Spychała	5–22,32
Piotr Wiśniewski	1–20,59
Barbara Mroczek	18,58
Grzegorz Karpowicz	2–17,76
Jerzy Cisło	17–17,54
Patryk Jaśniewski	1–16,62
Piotr Łaba	14,50
Zbigniew Skalik	4–12,48
Paweł Łabędzki	1–12,47

Legenda (przykładowo):
stan konta 9–40,58 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 40,58 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 12 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2022, 2023 lub 2024.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadania z matematyki nr 895, 896

Redaguje Marcin E. KUCZMA

895. Na okręgu zaznaczono n punktów; $n \geqslant 3$ jest ustaloną liczbą nieparzystą. Każdemu punktowi została przyporządkowana wartość 0 lub 1. Dozwolone są ruchy polegające na wybraniu trzech kolejnych punktów o wartościach (kolejno) a, b, c takich, że $a = c$, i zamianie b na $1-b$. Udowodnić, że startując z dowolnej konfiguracji i wykonując dozwolone ruchy, można uzyskać jednakową wartość dla wszystkich n punktów.

896. Udowodnić, że ciąg $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ o wyrazach
$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}$$
jest malejący.

Zadanie 896 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia

Rozwiązania zadań z numeru 10/2024

Przypominamy treść zadań:

887. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą A, dla której istnieją liczby zespolone u, v, w oraz liczba rzeczywista B takie, że $|u| = |v| = |w| = 1 = uvw$, zaś $u + v + w = A + Bi$.

888. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych $x, y, z \geqslant 0$ spełniające równanie $7^x + 2^{x+y} = z^2$.

887. Prościej: chodzi o wyznaczenie minimalnej wartości $\mathrm{Re}(u + v + w)$ dla liczb u, v, w o podanych własnościach. Są to liczby o module 1, zatem istnieją liczby rzeczywiste x, y, z takie, że $u = \mathrm{e}^{ix}$, $v = \mathrm{e}^{iy}$, $w = \mathrm{e}^{iz}$. Warunek $uvw = 1$ oznacza, że $x + y + z = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Przy tym
$$\mathrm{Re}(u + v + w) = \mathrm{Re}(u) + \mathrm{Re}(v) + \mathrm{Re}(w) = \cos x + \cos y + \cos z.$$
Należy znaleźć minimum tej sumy przy powyższym warunku.

Niech $c = \cos\frac{x+y}{2}$; więc $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \geqslant -2|c|$; a skoro $z = 2k\pi - (x + y)$, zatem $\cos z = \cos\bigl(2\cdot\frac{x+y}{2}\bigr) = 2c^2 - 1$. W konsekwencji
$$\cos x + \cos y + \cos z \geqslant 2c^2 - 2|c| - 1 = 2\bigl(|c| - \tfrac{1}{2}\bigr)^2 - \tfrac{3}{2} \geqslant -\tfrac{3}{2}\,.$$
W tych szacowaniach zachodzi równość, gdy $x = y = z = \pm\frac{2}{3}\pi$ (co odpowiada liczbom $u = v = w = \cos(\frac{2}{3}\pi) \pm i\,\sin(\frac{2}{3}\pi)$). Szukane minimum wynosi więc $-\frac{3}{2}$.

888. Niech liczby $x, y \geqslant 0$, $z > 0$ spełniają zadane równanie. Gdy $x = 0$, wtedy $2^y = (z - 1)(z + 1)$, więc $z \pm 1$ to potęgi dwójki, skąd $z = 3$ i $y = 3$. Trójka $(0, 3, 3)$ jest jednym z rozwiązań.

Gdy $x = 1$, równanie ma postać $7 + 2^{y+1} = z^2$, więc z jest liczbą nieparzystą. Dostajemy $2^{y+1} \equiv 2 \pmod 4$, czyli $y = 0$; wtedy $z = 3$. Trójka $(1, 0, 3)$ jest jednym z rozwiązań.

Dalej rozważamy $x \geqslant 2$. Dane równanie pokazuje, że $3^x \equiv z^2 \pmod 4$, co jest możliwe tylko dla parzystego x. Niech więc $x = 2t$ $(t \geqslant 1)$; zapiszmy równanie tak: $(z + 7^t)(z - 7^t) = 2^{2t+y}$. Pierwszy czynnik po lewej stronie jest liczbą dodatnią, więc drugi też; stąd $z \geqslant 8$. Oba czynniki muszą być potęgami dwójki:
$$z + 7^t = 2^k, \quad z - 7^t = 2^l \quad (k > l \geqslant 0,\ \ k + l = 2t + y).$$
Po odjęciu stronami: $2 \cdot 7^t = 2^l(2^{k-l} - 1)$, skąd $l = 1$, $7^t = 2^{k-1} - 1$.

Gdy $k = 4$, dostajemy $t = 1$ (czyli $x = 2$), $y = k + l - 2t = 3$, $z^2 = 7^2 + 2^5$, czyli $z = 9$. Trójka $(2, 3, 9)$ jest jednym z rozwiązań. Gdy $k \geqslant 5$, dostajemy $7^t = 2^{k-1} - 1 \equiv -1 \pmod{16}$. Sprzeczność, bo potęgi siódemki (mod 16) to tylko 1 lub 7. Zadane równanie ma więc trzy rozwiązania: $(0, 3, 3)$, $(1, 0, 3)$, $(2, 3, 9)$.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 M w roku szkolnym 2023/2024

Teraz coroczne omówienie wybranych zadań – czyli (jak zwykle) tych, które okazały się trudniejsze: wysoki *współczynnik trudności* (WT) i/lub niewielka *liczba poprawnych rozwiązań* (LPR); oraz tych, w których pojawiły się intrygujące pomysły rozwiązań oraz komentarze uczestników. Znaczne ich fragmenty umieszczamy w e-wydaniu (w zakładce „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

* * *

Zadanie **866.** [Dane $p, q \in \mathbb{P}$ (zbiór liczb pierwszych), $p \neq q$; $2^p-1, 2^q-1 \in \mathbb{P}$; $pq|2^p-1$, $pq|2^q-1$; $d \in \mathbb{N}$, $d|2^{pq}-1 \Rightarrow pq|d-1$] ($WT = 2{,}68$; $LPR = 9$). Wszystkie dobre rozwiązania podobne (zasadniczo jak firmowe): **M. Adamaszek**, **W. Bednarek**, **S. Kitowski**, **K. Maziarz**, **J. Olszewski**, **M. Pater**, **M. Warmuz**, **T. Wietecha**, **P. Wiśniewski**.

Zadanie **869.** [Dla $x, y \in \mathbb{R}_+$: $g(x,y) = \min\Big(x, \frac{1}{x}, \frac{xy+1}{x}\Big)$; $\sup g(x,y) = ?$] ($WT = 1{,}34$; $LPR = 25$). Jak widać, było łatwe. Przywołujemy je tu po to, by wspomnieć o kilku rozwiązaniach *niepoprawnych*, korzystających z „twierdzenia" (fałszywego): Jeśli funkcja ciągła na pewnym zbiorze $A \subset \mathbb{R}^n$ jest w jego wnętrzu różniczkowalna, ale bez punktów, w których różniczka jest zerowa, wówczas wartość minimalna jest przyjmowana w pewnym punkcie brzegu zbioru A. No cóż, tak jest, gdy zbiór A jest domknięty i ograniczony. Ale gdy (na przykład) A jest ćwiartką płaszczyzny ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$), wystarczy spojrzeć na funkcję e^{-xy}, by zrozumieć błąd.

Zadanie **870.** [$\triangle ABC$ równoboczny $\Rightarrow$ (**a**) $\forall\, P \in$ pł(ABC): $AP + BP \geqslant CP$ (&cykl); (**b**) to samo $\forall\, P$ w przestrzeni] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 13$). Redaktor Ligi ze skruchą przyznaje, że nie rozpoznał tu szczególnego przypadku nierówności Ptolemeusza ($PA \cdot BC + PB \cdot AC \geqslant PC \cdot AB$, słusznej dla *dowolnej* czwórki punktów w przestrzeni dowolnego wymiaru – rozwiązanie w jednej linijce, dostrzeżone przez ośmioro uczestników: **M. Adamaszek**, **B. Knapik**, **P. Kubit**, **P. Kumor**, **K. Maziarz**, **B. Mroczek**, **T. Wietecha**, **P. Wiśniewski**.

Piękne rozwiązanie czysto geometryczne, dwoma sposobami w części (**a**) i dwoma w części (**b**), przedstawił **Janusz Olszewski**. Oto jeden z tych sposobów (**b**): niech (b.s.o.) $P \neq A$, $AB = BC = CA = a$; B', C', P' – obrazy B, C, P w inwersji względem sfery o środku A, promieniu 1; nietrudno wykazać podobieństwa $\triangle ABP \sim \triangle AP'B'$, $\triangle ACP \sim \triangle AP'C'$, $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$; a stąd, pisząc odpowiednie proporcje, wywnioskować, że $\triangle B'P'C'$ jest podobny do trójkąta o bokach BP, CP, AP (!) (całość pracy w e-wydaniu).

Zadanie **871.** [Dana liczba parzysta $n > 0$;
(**a**) $P\colon = [n{+}1, 2n{+}1] \cap \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, M \subset P\, \forall\, m \in M\colon\ \sum_{k \in M} k \not\equiv 0 \pmod{m}$;
(**b**) czy zawsze istnieją dwa różne takie zbiory M?] ($WT = 1{,}99$; $LPR = 16$). Niech $S = \sum_{k=n+1}^{2n+1} k = cd$, gdzie $c = n+1$, $d = \frac{3}{2}n + 1$. **Janusz Olszewski** traktuje liczby $n{+}1, \ldots, 2n{+}1$ jako wierzchołki grafu skierowanego, w którym $(x \to y) \Leftrightarrow (y|S{-}x)$. Załóżmy odpowiedź *nie* na pytanie (**b**); wtedy musi istnieć n wierzchołków, z których wychodzą krawędzie do innych wierzchołków; więc istnieje $\geqslant n$ krawędzi $x \to y$, gdzie $x \neq y$. Łatwo sprawdzić, że $c \to c$, $d \to d$, zatem istnieje $\geqslant n+2$ krawędzi wchodzących do $n+1$ wierzchołków; pewne dwie muszą wchodzić do tego samego: $k \to m$, $l \to m$ ($k \neq l$). To oznacza, że $m|S{-}k$, $m|S{-}l$, skąd $m|k{-}l$; to już sprzeczność, bo $|k-l| \leqslant n < m$. Stąd odpowiedź *tak* na pytanie (**b**) (więc i dowód tezy (**a**)).

Kilka prac zawiera zasadniczo takie samo rozumowanie, jednak bez terminologii „grafy, krawędzie", która tu wydaje się idealnie dopasowana.

W dwóch innych pracach (**M. Kasperski**, **B. Knapik**) widzimy ciekawe symulacje komputerowe ($\to$ e-wydanie) sugerujące, że zbiorów o badanej własności jest znacznie więcej niż dwa.

Weterani Klubu 44 M
(w kolejności uzyskiwania statusu weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (16), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (24), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (14), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (9), P. Kubit (8), J. Cisło (17), W. Bednarek (9), D. Kurpiel, P. Najman (9), M. Kieza (4), M. Kasperski (5), K. Dorobisz, A. Woryna (4), T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett (4), M. Spychała (5), A. Kurach, S. Bednarek, M. Pater, Ł. Merta
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M
(alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski, B. Żmija;

„jednokrotni": R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, R. Kujawa, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, K. Matuszewski, K. Maziarz, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, K. Morawski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, N. Porwol, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, J. Węgrecki, P. Wiśniewski, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, K. Zygan, P. Żmijewski.

Zadanie **875.** [Dana liczba nieparzysta N oraz ciąg $(x_1, \ldots, x_N)$, $x_i \in \{0,1\}$; dla $k \in \{1, \ldots, N\}$: $a_k\colon = \sum_{i<k} x_i$, $b_k\colon = \sum_{i>k} (1{-}x_i)$, $c_k = a_k + b_k$; $\exists!\, z\colon\ |\{k\colon\ z = c_k\}| \equiv 1 \pmod 2$; $z = ?$] ($WT = 2{,}62$; $LPR = 7$ (8?)). Dobre rozwiązania (w większości podobne do firmowego): **M. Adamaszek**, **R. Kujawa**, **J. Olszewski**, **M. Warmuz**, **M. Kasperski**, **P. Łabędzki**, **M. Spychała**; ponadto jedna praca z pomyłką (której usunięcie nie jest trudne, jednak wymaga małej zmiany rozumowania).

Zadanie **878.** [Znaleźć $r \in \mathbb{N}$, $r > 2$: $\exists$ nieskończenie wiele zbiorów $\{p_1, \ldots, p_r\}$, $p_i \in \mathbb{P}$: $\forall\, i \in \{1, \ldots, r\}$: $p_1 \ldots p_r | 2^{p_i - 1} - 1$ (im większe r, tym lepiej)] ($WT = 3{,}29$; $LPR = 3$+autor). Zaczniemy od $r = 3$. Ładne rozwiązanie pokazał **Janusz Olszewski** (przejrzysta redakcja – zachęcamy do lektury w e-wydaniu!). Inną drogą poszedł **Piotr Wiśniewski**, odwołując się do pracy A. Rotkiewicza z roku 1967 (w której jedno z twierdzeń nakrywa naszą tezę dla $r = 3$); nie podał pełnego odsyłacza. Dla zainteresowanych Czytelników: (przyp. red.: praca, zatytułowana *On the prime factors of the number* $2^{p-1}-1$, ukazała się w *Glasgow Math. J.* 9 (1968), 82–86; natomiast w *Cambridge Univ. Press* – jej przedruk, który łatwo wyszukać – wystarczy wstukać np. `on the prime factors rotkiewicz`; podany tam dowód nie jest elementarny, przy tym odsyła do jeszcze innych prac).

Przypadek $r = 2$ był rozpatrzony w zadaniu z obozu OM 2010 (`om.sem.edu.pl`; ten odsyłacz posłużył jako wskazówka do omawianego zadania 878). **Piotr Kumor** (autor 878) zauważył, że przez dość naturalną modyfikację daje się uzyskać tezę dla $r = 4$. Uzyskana przez autora konstrukcja została użyta jako rozwiązanie firmowe. Dokładnie tę samą konstrukcję znalazł **Michał Adamaszek**. Co ciekawe, obaj Panowie opatrzyli swoje prace komentarzami, w znacznej mierze identycznymi. Zamieszczamy je w e-wydaniu; kto ciekawy, co to *Super-Poulet numbers*, niech tam zajrzy. Warto!

Autor zadania liczył, że od rozwiązujących dowie się czegoś na temat możliwości $r > 4$; niestety, $r = 4$ pozostaje (na razie?) osiągnięciem max.

Zadanie **880.** [Czy istnieją $A, B \subset \mathbb{Q}_+$ takie, że: $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}_+$ oraz (dla $x, y \in \mathbb{Q}_+$): $\big(xy = 1 \Rightarrow x, y$ są w tym samym zbiorze (A lub B)$\big)$; $\big(|x-y| = 1 \Rightarrow x, y$ są w różnych zbiorach$\big)$?] ($WT = 1{,}63$; $LPR = 16$). **Michał Adamaszek** dał rozwiązanie – wzorzec zwięzłości: każda liczba $x \in \mathbb{Q}_+$ ma jednoznaczne rozwinięcie w skończony ułamek łańcuchowy $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ (notacja: np. $[a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}$): $a_0 \geqslant 0$, $a_i \geqslant 1$ dla $i \geqslant 1$; $a_n \geqslant 2$ jeśli $n \geqslant 1$. Przypisujemy x do zbioru A (odp. B), gdy suma $\sum_{i=0}^{n} a_i$ jest parzysta (odp. nieparzysta). Tak określone zbiory A, B spełniają wymagane warunki, co wynika z równości $\frac{1}{x} = [0; a_0, a_1, \ldots, a_n]$, $x - 1 = [a_0-1; a_1, \ldots, a_n]$ (dla $x > 1$).

To samo rozumowanie podali: **Andrzej Daniluk** i **Piotr Kumor**. W pozostałych pracach nie ma mowy o *ułamkach łańcuchowych*, choć de facto są one „w tle” obecne (czymże innym jest „uogólniony algorytm Euklidesa”?) – brak tych kluczowych słów sprawia, że zapis staje się cięższy (vide: firmówka). Odnotujmy ponadto jedno rozwiązanie wyraźnie odmienne (bardziej kombinatoryczne): **Janusz Olszewski** (→ e-wydanie).

Zadanie **881.** [$a_0 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$; $\lim_{n\to\infty}(a_1 \ldots a_{n-1}/a_n) = ?$] ($WT = 1{,}50$; $LPR = 18$). Nie sprawiło kłopotu uczestnikom; wielu z nich znalazło nie tylko wynik $1/\sqrt{5}$, ale również wartość badanej granicy $1/\sqrt{a_0^2 - 4}$ przy innych wartościach początkowych $|a_0| > 2$. Znacznie ciekawsze jest rozważanie przypadku $|a_0| \leqslant 2$ (co nie było przedmiotem zadania; a szkoda); granica wówczas nie istnieje, co wnikliwie uzasadnił **Janusz Olszewski** (→ e-wydanie).

Zadanie **882.** [$ABCD$ – równoległobok; K, L, M, N – punkty wewnątrz boków AB, BC, CD, $DA \Rightarrow$ (**a**) ortocentra trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN tworzą równoległobok; (**b**) to samo dla ich środków ciężkości; (**c**) to samo dla środków okręgów opisanych] ($WT = 2{,}27$; $LPR = 12$). Efektowne „dynamiczne” rozumowanie przeprowadził **Janusz Fiett**. Własności (**a**), (**b**), (**c**) są oczywiste, gdy K, L, M, N są środkami odpowiednich boków (cała konfiguracja jest wówczas środkowo symetryczna). A dalej – *jeden wspólny pomysł* daje uzasadnienie tych trzech tez; dla przykładu weźmy własność (**c**): załóżmy, że dla pewnego wyboru punktów K, L, M, N czworokąt $A'B'C'D'$ (o wierzchołkach w środkach okręgów opisanych na wymienionych trójkątach) jest równoległobokiem. Wybieramy jeden z tych punktów – powiedzmy M – i przesuwamy go do innego położenia na boku CD, nie ruszając przy tym punktów N, K, L; punkty A', B' nie ruszają się; proste symetralne odcinków CL i DN również nie zmieniają położenia; zaś proste symetralne odcinków CM i DM przesuwają się równolegle, przy czym odległość między nimi pozostaje stała (równa $\frac{1}{2}CD$). Odcinek $C'D'$ (wyznaczony przez odpowiednie punkty przecięcia jednej pary symetralnych z drugą parą) wykonuje przesunięcie równoległe (!), wobec czego czworokąt $A'B'C'D'$ (przy nowym położeniu punktów C', D') nadal jest równoległobokiem. Wystarczy teraz wykonać analogiczne przemieszczenia punktów $N \in DA$, $K \in AB$, $L \in BC$ do dowolnie wybranych pozycji; $A'B'C'D'$ pozostanie równoległobokiem.

W przypadku każdej z własności (**a**), bądź (**b**), przesunięcie punktu $M \in CD$ (bez ruszania N, K, L) daje podobny efekt: można wskazać dwie pary prostych równoległych, których odpowiednie przecięcia wyznaczają punkty C', D', określone teraz jako ortocentra bądź środki ciężkości trójkątów CLM, DMN; przy tym jedna para pozostaje nieruchoma, a druga przesuwa się równolegle, nie zmieniając odległości, dzięki czemu odcinek $C'D'$ znów się przesuwa równolegle; konkluzja jak w przypadku (**c**). Wskazanie owych par prostych zostawiamy Czytelnikowi jako nietrudne ćwiczenie; a kto woli przyjść na gotowe – może zajrzeć do e-wydania, gdzie znajdzie omawiane rozwiązanie bez skrótów.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.