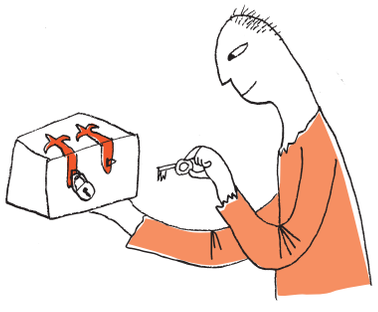
Jak przesłać bezpiecznie pierścionek zaręczynowy?

*Piotr CHRZĄSTOWSKI-WACHTEL**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czemu przesyłać? Nie można dać osobiście? Otóż czasami nie można. Wyobraźmy sobie sytuację, w której więzień Artur (załóżmy, że niesłusznie oskarżony) chce się oświadczyć swojej ukochanej Biance. Wykonał już pierścionek zaręczynowy, ale nie może się z nią spotkać. Na szczęście znalazł kuriera, który zobowiązał się dostarczyć przesyłkę, ale nie jest to osoba godna zaufania. Nasz bohater boi się, że pierścionek może zostać skradziony, choć sam kurier funkcjonuje na razie dobrze, skutecznie przekazując listy między zakochanymi.

Artur wykonał również gustowną szkatułkę zamykaną na kłódki. Na szczęście ma ich kilka i na wszelki wypadek szkatułka została przygotowana tak, żeby można było zapiąć ją na kilka kłódek. Mógłby więc włożyć pierścionek do szkatułki, zamknąć ją na kłódkę i wysłać kurierem, a następnie przesłać ukochanej kluczyk, którym będzie mogła otworzyć skrzynkę. Załóżmy jednak, że w kwestiach bezpieczeństwa Artur jest bardzo pryncypialny i z zasady nigdy nie powierza nikomu swoich kluczy. Czy przy takim ograniczeniu jest w stanie bezpiecznie wysłać Biance pierścionek?



Artur ma następujący plan. Wysyła najpierw Biance instrukcję obsługi – w instrukcji jest napisane, żeby Bianka kupiła kłódkę. Następnie wkłada pierścionek do szkatułki i zamyka ją na swoją kłódkę. Wysyła kurierem zamkniętą szkatułkę bez kluczyka, a Bianka, zgodnie z instrukcją, zamyka szkatułkę na drugą kłódkę i odsyła bez swojego kluczyka całość do Artura. Teraz Artur otrzymuje szkatułkę zamkniętą na dwie kłódki z pierścionkiem w środku. Otwiera swoim kluczykiem swoją kłódkę i odsyła szkatułkę Biance, a ta może już bezpiecznie otworzyć własną kłódkę. Kurier nigdy nie może otworzyć szkatułki, bo klucz nie wędruje między stronami.

Wygląda na to, że ten algorytm mógłby być używany w kryptografii. Jeśli chcemy zakodować jakąś informację, możemy użyć klucza szyfrującego tak, aby potencjalny podglądacz, powiedzmy właściciel pośredniczącego w transmisji danych serwera, nie mógł odczytać oryginału. Problem polega na tym, że zazwyczaj, aby rozszyfrować zakodowany tekst, powinniśmy znać klucz. Przesłanie klucza może być równie niebezpieczne, jak oryginalnej wiadomości – też może zostać podglądnięty w czasie transmisji danych. Z kolei przekazanie klucza zawczasu może być kłopotliwe albo wręcz niemożliwe. Ponadto, jeśli mamy do przekazania duże dane, to w niektórych protokołach szyfrujących może się okazać, że klucz jest zbyt krótki i zastosowanie go naraża naszą wiadomość na przykład na atak statystyczny.

Zanim przejdziemy dalej, dwa słowa o uwielbianej przez informatyków funkcji xor. Jest to funkcja, która dla dwóch bitów daje jedynkę, jeśli są różne, a zero, jeśli są takie same. W logice nazywana jest alternatywą wyłączającą (eXclusive OR), a w podręcznikach oznaczana jest zwykle symbolem $\oplus$. Zauważmy, że jest to funkcja przemienna: $a \oplus b = b \oplus a$ i łączna: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$. Kolejność podania argumentów nie ma znaczenia, a łączność wynika z zauważenia, że gdy ksorujemy więcej bitów, to wynik będzie równy jeden, gdy liczba jedynek w tym ciągu bitów jest nieparzysta, a zero w przeciwnym razie. Grupowanie ich, w ten czy inny sposób, nie zmieni wyniku. Czyli wynikiem $(b_1 \oplus ... \oplus b_n)$ będzie 1 wtedy i tylko wtedy, gdy będzie nieparzyście wiele takich indeksów k, że $b_k = 1$.

Odnotujmy kilka podstawowych własności funkcji xor. Po pierwsze $a \oplus a = 0$. Po drugie $0 \oplus a = a$. Po trzecie $a \oplus b \oplus a = b$. Ta ostatnia równość wynika z dwóch pierwszych, z łączności i z przemienności. Po prostu $a \oplus b \oplus a = (b \oplus a) \oplus a = b \oplus (a \oplus a) = b \oplus 0 = b$.

To, co robimy na bitach, możemy też zrobić na ciągach bitów: dla dwóch jednakowej długości ciągów bitów możemy wykonać xor na każdej pozycji oddzielnie. Oznacza to, że xor jest całkiem interesującą operacją arytmetyczną: jeśli będziemy reprezentować liczby z przedziału $[0, \ldots, 255]$ za pomocą jednego bajtu (czyli ciągu ośmiu bitów), to na przykład $9 \oplus 5 = 12$, gdyż 9 ma reprezentację dwójkową 00001001, 5 ma reprezentację 00000101, a 12 ma reprezentację 00001100 i te jedynki w reprezentacji dwójkowej 12 są tam, gdzie reprezentacje 9 i 5 się różnią. Oczywiście skoro $9 \oplus 5 = 12$, to $12 \oplus 5 = 9$ i $12 \oplus 9 = 5$.

Wykorzystując te własności, moglibyśmy zaszyfrować dowolny tekst, ksorując go z danym kluczem, a odszyfrowanie go polegałoby na ponownym ksorowaniu z tym samym kluczem. Jeśli zatem

odbiorca wiadomości, którą chcemy zaszyfrować, znałby nasz klucz, to tekst, który chcemy nadać, sksorowalibyśmy z kluczem litera po literze. Kiedy odbiorca drugi raz sksoruje zaszyfrowany tekst z tym kluczem, to odczyta oryginał.

Powiedzmy, że umawiamy się, że naszym kluczem będą słowa inwokacji z „Pana Tadeusza” *Litwo, Ojczyzno moja! ty jesteś jak zdrowie*. Tekst ten ma 43 znaki. Zakodowany w kodzie ASCII będzie miał 342 bity, które mogą być użyte do ksorowania z kolejnymi znakami szyfrowanego tekstu. Wynik, jaki dostaniemy, raczej nie będzie przypominał oryginału. Na przykład słowo *Delta*, mające w kodzie ASCII wartości kolejnych liter równe [68][101][108][116][97] sksorowane z pierwszymi 5 znakami klucza, czyli słowem *Litwo* o kodzie ASCII [76][105][116][119][111], dałoby tekst, który w kodzie ASCII miałby reprezentację [8][12][24][3][14], bo $68 \oplus 76 = 8$, $101 \oplus 105 = 12$, $108 \oplus 116 = 24$, $116 \oplus 119 = 3$, $97 \oplus 111 = 14$. Rzecz jasna, ciąg [8][12][24][3][14] sksorowany z ciągiem [76][105][116][119][111], czyli słowem *Litwo*, da nam z powrotem ciąg [68][101][108][116][97], czyli słowo *Delta*. Są jednak wady tego pomysłu.

Tak naprawdę nie istnieje tekst o odczycie [8][12][24][3][14] w kodzie ASCII, gdyż kody odpowiadające „drukowalnym” znakom znajdują się w przedziale od 32 do 126. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, by w komunikacji wykorzystywać po prostu ciągi liczb.

Pierwsza – przekazanie i przechowywanie klucza: każda metoda jest wrażliwa na ataki. Druga: może się okazać, że komunikat, który nadajemy, jest dłuższy niż klucz. Wtedy oczywiście można po tylu pierwszych znakach, ile jest w kluczu (czyli 43 w naszym przykładzie), ponownie zacząć od początku używać klucza, ale jest w tym pewien problem. Okazuje się, że jeśli nasz zaszyfrowany tekst jest bardzo długi, to w tym momencie niektóre litery klucza zaczynają istotnie częściej być używane do kodowania, a inne rzadziej. Na przykład w naszym kluczu są aż 4 litery *o* i nie ma żadnej litery *u*. Jeśli tekst, który chcemy zakodować, jest napisany w języku polskim, dla którego częstości występowania liter są nam znane, to najczęściej występującą w naszym języku literę *a* będziemy częściej kodowali za pomocą *o* niż jakąkolwiek inną literę zakodowaną jakimkolwiek innym znakiem. Badając zaszyfrowany tekst, moglibyśmy znaleźć najczęściej występującą zaszyfrowaną literę i przyjąć, że jest to szyfr litery *a*. W ten sposób moglibyśmy odtworzyć najczęściej występującą literę klucza i tak po nitce do kłębka złamać cały klucz. Dlatego dobrze byłoby, gdyby klucz miał długość równą długości zaszyfrowanego tekstu, a najlepiej, żeby dodatkowo był jakimś zupełnie losowym ciągiem znaków, niemającym odpowiednika w języku naturalnym.

Możemy teraz przesyłać zaszyfrowane wiadomości, podobnie jak Artur przesyłał pierścionek swojej ukochanej. Wystarczy bowiem kolejno:

- wygenerować losowy ciąg znaków o długości równej długości tekstu,
- sksorować go z tekstem, który chcemy zaszyfrować,
- wysłać odbiorcy tekst zakodowany kluczem, którego on nie zna,
- poprosić go o wygenerowanie swojego klucza, którego z kolei my nie musimy znać,
- poprosić o powtórne zakodowanie zaszyfrowanego tekstu swoim losowo wygenerowanym kluczem i przesłanie nam podwójnie zakodowanego tekstu,
- otrzymany podwójnie zakodowany tekst sksorować z naszym kluczem, zdejmując jedno zakodowanie, ale pozostawiając tekst zakodowany kluczem odbiorcy,
- przesłać odbiorcy wynik,
- poprosić go o sksorowanie ze swoim kluczem.

Druga kłódka zdjęta! Nadany tekst został odczytany. Nikt po drodze nie widział ani oryginalnego tekstu, ani klucza. Oba klucze możemy wyrzucić. No po prostu super!

Niestety możemy wyrzucić do kosza też cały pomysł takiego szyfrowania. Zawiera on bowiem pewien trudno usuwalny błąd. Nie tak łatwo go dostrzec na pierwszy rzut oka. Problem w tym, że oprócz zaszyfrowania wiadomości żądamy tego, aby nikt, kto będzie podglądał transfer zaszyfrowanych tekstów, nie był w stanie odtworzyć oryginału. Sprawdźmy, co by było, gdyby potencjalny podglądacz przechwycił trzy zaszyfrowane teksty: pierwszy zaszyfrowany kluczem *a* przez Artura, drugi doszyfrowany kluczem *b* przez Biankę i trzeci

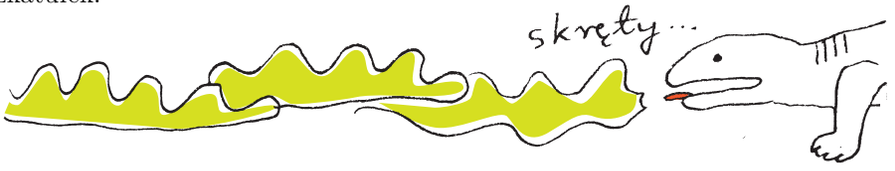
odszyfrowany kluczem a przez Artura. Wtedy te trzy przesyłane teksty to kolejno $t \oplus a$, $t \oplus a \oplus b$ oraz $t \oplus a \oplus b \oplus a = t \oplus b$.

Sksorowanie tych trzech zaszyfrowanych wiadomości to $(t \oplus a) \oplus (t \oplus a \oplus b) \oplus (t \oplus b)$, co z uwagi na łączność i przemienność funkcji xor daje nam $(t \oplus t) \oplus (a \oplus a) \oplus (b \oplus b) \oplus t = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus t = t$. Bez żadnego wysiłku z tych trzech tekstów odtworzymy zaszyfrowaną wiadomość t.

Klasycznym rozwiązaniem naszego problemu w kryptografii jest *protokół Diffiego–Hellmana* pozwalający ustalić stronom komunikacji *wspólny* klucz szyfrowania w bezpieczny sposób.

Zauważmy, jak ważne w kryptografii jest wyspecyfikowanie celu – tu jest nim niemożliwość lub wystarczająca trudność odtworzenia zaszyfrowanego tekstu przez podglądacza bez znajomości kluczy szyfrujących. Tej istotnej własności niestety naszej metodzie brakuje.

A najciekawsze jest to, że algorytm Artura z fizycznymi kłódkami działa i jest nie do złamania, nawet jeśli kurier przez jakiś czas ma dostęp do zamkniętych szkatułek.



Do powierzchni obrotowych i jeszcze dalej

*Michał MIŚKIEWICZ**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Full ahead, mr. Sulu, maximum warp.

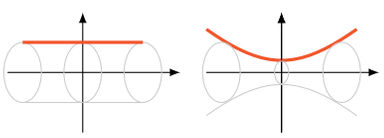
James T. Kirk,
Star Trek: The Original Series, S01E08

Bohaterem tego artykułu jest *produkt skręcony*, po angielsku: *warped product*. Słowo *warp* (wykrzywić, odkształcić) zrobiło karierę za sprawą *warp drive*, hipotetycznego napędu pozwalającego rozwijać prędkości nadświetlne. Został on spopularyzowany w serii science fiction Star Trek i doczekał się całkiem poważnego traktowania, o czym więcej można przeczytać w *Opowieściach o podróżach w kosmos* z Δ^5_{13}, lub też wyszukując hasło *Alcubierre drive*. Wpływ tej idei na zbiorową wyobraźnię jest na tyle duży, że w 2020 roku amerykańska inicjatywa rozwoju i dystrybucji szczepionek przeciwko covid-19 przyjęła nazwę *Operation Warp Speed*.

Oficjalne logo *Operation Warp Speed*, partnerstwa publiczno-prywatnego mającego na celu szybki rozwój i dystrybucję szczepionek przeciwko covid-19 (maj 2020 – luty 2021).

Nazwa nie jest jedyną cechą łączącą produkt skręcony z napędem warp. Po pierwsze, napęd ten opiera się na pomyśle odkształcania przestrzeni, co rodzi pojęciową trudność: wszak umiemy giąć dwuwymiarową kartkę w trójwymiarowej przestrzeni, ale jak mielibyśmy wyginać samą przestrzeń? Odpowiedzią na tę trudność jest geometria wewnętrzna, czyli język pozwalający opisywać geometrię i deformacje obiektu samego w sobie, bez odwołań do otaczającej go przestrzeni. Produkt skręcony jest właśnie jednym z narzędzi takiego opisu.

Po drugie, przekroczenie prędkości światła konwencjonalnymi metodami nie jest możliwe. Furtkę do obejścia tego zakazu proponuje napęd warp. Ograniczenie „prędkości” podobnej natury zobaczymy niżej, badając bliżej powierzchnie obrotowe. Przekonamy się, że produkt skręcony umożliwia pokonanie tej granicy. Zachęcam więc Czytelnika do lektury, by *odkrywać dziwne nowe światy* oraz *śmiało pójść tam, gdzie żaden człowiek wcześniej nie dotarł*.



Rys. 1. Walec ($f = \text{const.}$) i hiperboloida jednopowłokowa ($f(x) = \sqrt{1+x^2}$) jako powierzchnie obrotowe. Katenoida ($f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$) wygląda podobnie do hiperboloidy

Powierzchnie obrotowe. Przepis na taką powierzchnię jest prosty. Bierzemy ciągłą dodatnią funkcję $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ i jej wykres $y = f(x)$ obracamy wokół osi x. Otrzymaną powierzchnię można opisać równaniem $r = f(x)$, jeśli przez $r = \sqrt{y^2+z^2}$ oznaczymy odległość od osi x.

Przykłady można mnożyć. Przyjęcie za f funkcji stałej prowadzi do konstrukcji walca. Obrót hiperboli, czyli wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, prowadzi do hiperboloidy jednopowłokowej. Powierzchnię tę zobaczymy też, obserwując szybko obracającą się kostkę (jak na początku filmu [M]). Z kolei funkcja

[M] Mathologer, *Why don't they teach simple visual logarithms (and hyperbolic trig)?*, film na platformie YouTube: youtu.be/G0Fa5Zl-Z3c.