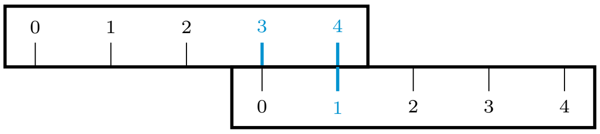
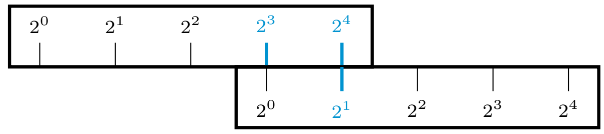
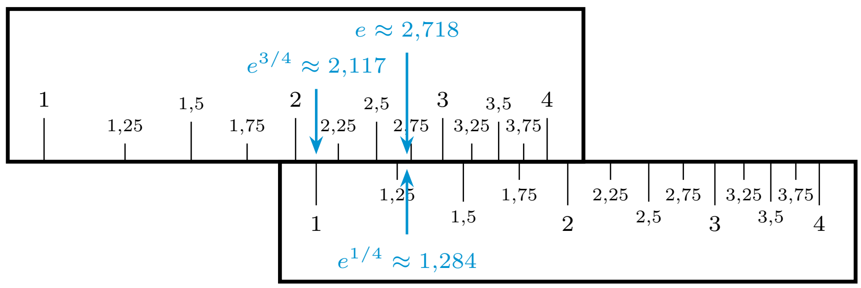
tak, by trójka pojawiła się nad zerem, a wówczas wynik odczytujemy powyżej jedynki. Zgodnie z oczekiwaniami, wyszło 4. Ale spójrzmy na małą modyfikację:





Pod każdą etykietą na obu linijkach dopisaliśmy dwójkę, w ten sposób podmieniając ciąg arytmetyczny $0, 1, 2, \ldots$ na ciąg geometryczny $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ Tak jak w przypadku rysunku 2, dodawanie zamieniło się na mnożenie potęg dwójki, u nas konkretnie: $8 \cdot 2 = 16$. Ta modyfikacja to właśnie *suwak logarytmiczny.* Oczywiście standardowy suwak dla wygody użytkowania uwzględnia na swojej skali takie liczby, jak $1, 2, 3, \ldots$, a nie tylko potęgi dwójki. W tym kontekście naturalne jest pytanie: *a gdzie te liczby umieścić?*, na które odpowiedzią jest właśnie logarytm: liczba y pojawia się w odległości $\log(y)$ od początku linijki (wybór podstawy logarytmu jest tu drugorzędny). Poniżej widać, jak można za pomocą takiego przyrządu pomnożyć liczby $e^{1/4} \approx 1{,}284$ i $e^{3/4} \approx 2{,}117$:



Bohater piosenki Sama Cooke'a miał silne, choć trudne do wyrażenia w słowach przekonanie, że umiejętność dodawania jest wystarczająca. Wystarczająca nie tylko do tego, by mnożyć, ale też by spełnić marzenie o odwzajemnionej miłości. Lubię więc myśleć, że co nieco jednak wiedział o naturze suwaka logarytmicznego. Posłuchajmy sami:

But I do know one and one is two
And if this one could be with you
What a wonderful world this would be

"Wonderful world", Sam Cooke

Zadania

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Dominik BUREK

M 1804. Dane są trójmiany kwadratowe $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{2025}(x)$ z tymi samymi współczynnikami przy x^2 oraz tymi samymi współczynnikami przy x, ale z różnymi wyrazami wolnymi. Każdy z tych trójmianów ma dwa pierwiastki rzeczywiste. Niech x_i będzie jednym z pierwiastków trójmianu $f_i(x)$. Jakie wartości może przyjmować suma

$$f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{2025}(x_{2024}) + f_1(x_{2025})?$$

M 1805. Wyznaczyć wszystkie liczby złożone n takie, że dla dowolnego przedstawienia n na dwa czynniki całkowite dodatnie $n = xy$ liczba $x + y$ jest potęgą dwójki.

M 1806. Dany jest (mn)-kąt foremny. Wśród jego wierzchołków dokładnie m jest pokolorowanych na czerwono, a n na niebiesko (żaden wierzchołek nie jest pokolorowany dwukrotnie). Udowodnić, że pewien odcinek, którego końce znajdują się w czerwonych punktach, jest równy pewnemu odcinkowi, którego końce znajdują się w niebieskich punktach.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1111. Rozmiary kątowe tarczy słonecznej obserwowanej z powierzchni Ziemi wynoszą około 0,5°(przybliżony „pomiar" można wykonać np. oceniając, ile razy szerokość kciuka wyciągniętej ręki jest większa od widzianej średnicy tarczy słonecznej). Oszacuj temperaturę powierzchni Słońca. Przyjmij, że średnia temperatura powierzchni Ziemi jest bliska 0°C.

F 1112. W naczyniu o objętości V znajduje się gaz pod ciśnieniem p_0. Dysponujemy pompką o objętości skoku tłoka równej $v \ll V$. Potrzebujemy zmniejszyć ciśnienie w naczyniu do wartości p bez zmieniania temperatury gazu. Ile ruchów tłoka musimy wykonać i z jaką dokładnością osiągniemy wymagane ciśnienie?

Rozwiązania zadań ze strony 6

Rozwiązanie zadania M 1804.
Odpowiedź: Jedyną możliwą wartością jest 0.

Niech i-ty trójmian ma postać $f_i(x) = ax^2 + bx + c_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, 2025$. Wtedy

$$\begin{aligned} f_2(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) \\ &= c_2 - c_1, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości skorzystaliśmy z tego, że $f_1(x_1) = 0$. Podobnie otrzymujemy równości $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{2025}(x_{2024}) = c_{2025} - c_{2024}$ oraz $f_1(x_{2025}) = c_1 - c_{2025}$. Dodając otrzymane równości, dostajemy, że

$$\begin{aligned} &f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{2025}(x_{2024}) + f_1(x_{2025}) \\ &\qquad = (c_2 - c_1) + \ldots + (c_1 - c_{2025}) = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania M 1805.
Odpowiedź: $n = 15$.

Podstawiając $x = 1$, $y = n$, otrzymujemy, że $n = 2^k - 1$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k. Niech teraz $n = ab$, gdzie $a \geqslant b > 2$, i niech $a + b = 2^t$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej t. Gdyby $a = b = 2^{t-1}$, to $ab = 2^{2(t-1)}$, a to jest sprzeczność – mamy zatem $a > b$. Oczywiście zachodzi $k > t$. Ponadto

$$\begin{aligned} 2^k + 2^t &= ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1), \\ 2^k - 2^t &= ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1). \end{aligned}$$

Mnożąc te równości, otrzymujemy, że liczba $(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$ jest podzielna przez 2^{2t}.

Zauważmy jednak, że dwójka występuje w pierwszej potędze w rozkładzie na czynniki pierwsze jednej z liczb $b-1$ lub $b+1$, a w rozkładzie drugiej z tych liczb w potędze nie większej niż $t-1$. Tak samo jest z liczbami $a-1$ i $a+1$. Zatem podzielność liczby $(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)$ przez 2^{2t} jest możliwa tylko wtedy, gdy 2^{t-1} dzieli jedną z liczb $b-1$ i $b+1$ oraz jedną z liczb $a-1$ i $a+1$. Ponieważ $a < b < 2^t$, więc $b = 2^{t-1} - 1$ i $a = 2^{t-1} + 1$.

Wtedy jednak $k = 2t - 2$ i w szczególności $2^k - 1$ jest podzielne przez 3. Możemy zatem założyć, że w naszym rozumowaniu wybraliśmy $b = 3$. Wtedy $a = 5$, zatem $n = 15$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

Rozwiązanie zadania M 1806.
Opiszmy okrąg na (mn)-kącie foremnym i załóżmy, że długość każdego łuku pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami jest równa 1. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_m$ oznaczają czerwone wierzchołki, a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ wierzchołki niebieskie. Rozważmy mn łuków postaci A_iB_j, które skierowane są „od” A_i „do” B_j w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Każdy taki łuk może mieć długość równą jednej z liczb $1, 2, \ldots, mn - 1$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją dwa różne łuki, $A_{i_1}B_{j_1}$ i $A_{i_2}B_{j_2}$, o tej samej długości. Łatwo zauważyć, że wtedy odcinki $A_{i_1}A_{i_2}$ i $B_{j_1}B_{j_2}$ mają żądaną własność.

Rozwiązanie zadania F 1111.
Niech D oznacza średnicę Słońca, d średnicę Ziemi, T_S temperaturę bezwzględną powierzchni Słońca, a $T_Z = 273$ K temperaturę powierzchni Ziemi (0°C). Słońce wypromieniowuje energię proporcjonalnie do swej powierzchni, $4\pi D^2/4$, i do czwartej potęgi temperatury, T_Z^4, a Ziemia, w odległości R, absorbuje część tej energii równą stosunkowi powierzchni jej „tarczy”, $\pi d^2/4$, do powierzchni sfery o promieniu R $(4\pi R^2)$ i wypromieniowuje proporcjonalnie do T_Z^4 i całkowitej jej powierzchni, $4\pi d^2/4$ – współczynnik proporcjonalności jest ten sam, co w przypadku Słońca. Kątowa średnica Słońca równa 0,5° oznacza, że $D/R \approx \pi/360$. Otrzymujemy równanie:

$$\left(\pi\frac{d^2}{4}\right)\left(\frac{1}{4\pi R^2}\right)4\pi\left(\frac{D^2}{4}\right)T_S^4 = 4\pi\left(\frac{d^2}{4}\right)T_Z^4,$$

skąd wynika, że

$$\left(\frac{T_S}{T_Z}\right)^4 = 16\left(\frac{R^2}{D^2}\right) = 16\left(\frac{360}{\pi}\right)^2,$$

czyli

$$T_S \approx 21,4T_Z.$$

Po podstawieniu $T_Z = 273$ K otrzymujemy $T_S \approx 5840$ K. Astronomowie przyjmują $T_S = 5772$ K, a więc nasze przybliżenie jest nadspodziewanie dobre. Dzięki efektowi cieplarnianemu średnia temperatura powierzchni Ziemi jest nieco wyższa od przyjętej w rozwiązaniu i wynosi około 14,76°C.

Rozwiązanie zadania F 1112.
Podczas odpompowywania gazu należy wykonywać powolne ruchy tłoka pompy, aby zapewnić warunki, w których gaz będzie podlegał przemianie izotermicznej. Po wykonaniu jednego ruchu tłoka ciśnienie zmniejszy się od p_i do p_{i+1}:

$$p_{i+1} = p_i\left(\frac{V}{V+v}\right).$$

Zmniejszenie ciśnienia od p_0 do p będzie więc wymagało

$$x = \ln\frac{p_0}{p} / \ln\frac{V}{V+v}$$

ruchów tłoka. W ogólnym przypadku x nie będzie liczbą całkowitą, ale wypadnie pomiędzy dwoma wartościami całkowitymi: $n < x < n+1$. Przyjmijmy $x = n + q$ z $0 < q < 1$. Mamy wówczas:

$$p = p_n\left(\frac{V}{V+v}\right)^q = p_{n+1}\left(\frac{V}{V+v}\right)^{q-1}.$$

Możemy zakończyć pompowanie z ciśnieniem równym p_n lub p_{n+1}. Oszacujmy, jaki popełnimy błąd, przyjmując każdą z tych wartości:

$$\begin{aligned} \Delta_+ &= p_n - p = p_n\left(1 - \left(\frac{V}{V+v}\right)^q\right) = p_n\left(1 - \left(1 - \frac{v}{V+v}\right)^q\right) \\ &\approx p_n\frac{qv}{V+v}. \end{aligned}$$

Analogicznie dla $\Delta_- = p - p_{n+1}$:

$$\Delta_- \approx p_n\frac{(1-q)v}{V+v}.$$

Najlepszą oceną popełnionego błędu będzie więc:

$$\Delta = \frac{\Delta_+ + \Delta_-}{2} = p_n\left(\frac{v}{2(V+v)}\right) \approx p\left(\frac{v}{2(V+v)}\right).$$