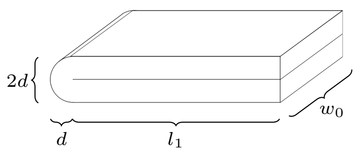
Papierem na księżyc

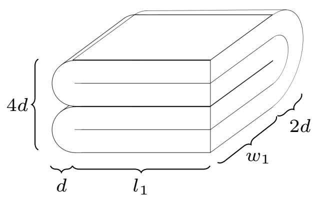
*Grzegorz SZYMANEK**

*Student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

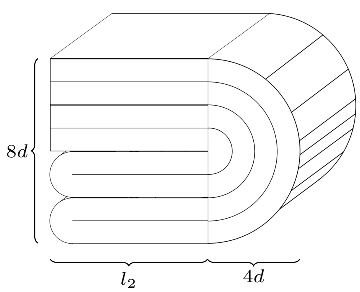
Znanym faktem jest, że zginając kartkę wpół, dokonujemy jej dwukrotnego pogrubienia. Z każdym zgięciem następne jest coraz trudniejsze – aż do momentu, w którym dokonanie jeszcze jednego jest już niemożliwe. Nasuwa się więc nieuchronne pytanie: ile właściwie razy można zgiąć daną kartkę wpół? Tę właśnie liczbę spróbujemy wyznaczyć, przyjmując, że kartkę zginać będziemy naprzemiennie po długości i szerokości. Niech n oznacza liczbę dokonanych zgięć; $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{W}_n$, $\mathcal{D}_n$ – odpowiednio: długość, szerokość i grubość kartki po n zgięciach. Na początek zdefiniujmy założenia, na których będziemy bazować podczas dalszego zgłębiania pomysłu:



Rys. 1. Pierwsze zagięcie – wykonane równolegle do krawędzi szerokości



Rys. 2. Drugie zagięcie – wykonane równolegle do krawędzi długości



Rys. 3. Trzecie zagięcie – wykonane równolegle do krawędzi szerokości

1. Złożenie kartki wpół oznacza, że na „zewnątrz” zagięcia powstaje łuk kolisty o takiej długości, by suma „zewnętrznej” powierzchni odpowiadała powierzchni kartki przed złożeniem.
2. „Wewnętrzna” część zagięcia jest punktowa – kartka zostaje w tym miejscu „złamana”.
3. Konsekwencją punktów 2 i 3 jest fakt, że objętość kartki na obszarze zagięcia maleje dwukrotnie. Przyjąć więc można jedną z dwóch możliwych interpretacji:
   - średnia gęstość kartki na zagięciu jest dwukrotnie większa niż przed wykonaniem zgięcia,
   - po wykonaniu zagięcia po stronie przeciwnej niż nowo utworzony łuk powstaje klin „kompensujący” ubytek w objętości.

   Niezależnie od tego, którą z powyższych opcji przyjmiemy, warunki 1 i 2 pozostają spełnione.

Tym samym możemy rozpocząć naszą przygodę. W celu ułatwienia obliczeń wprowadźmy oznaczenia (jak na rysunkach): l_m – długość płaszczyzny kartki (bez łuku), w_u – adekwatnie, szerokość płaszczyzny, d – początkowa grubość kartki, gdzie m oraz u należą do zbioru $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
W pierwszej kolejności wyraźmy grubość kartki po n zgięciach:

$$\mathcal{D}_n = d \cdot 2^n.$$

Dalej przyjmijmy następującą definicję długości i szerokości: operację rozpoczynamy od wykonania zagięcia równoległego do krawędzi szerokości $\mathcal{W}$, następnie do krawędzi długości $\mathcal{L}$, znowu $\mathcal{W}$ itd. Długość i szerokość wybieramy więc, określając kolejność wykonywanych zgięć (l_0 sprzecznie z lingwistyczną konwencją nie musi być większe od w_0).

$n = 1$
$$\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_0$$
$$2l_1 + \pi d = l_0 + 0$$
$$l_1 = \frac{1}{2}(l_0 - \pi d)$$
$$\mathcal{L}_1 = l_1 + d$$

$n = 3$
$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2$$
$$2l_2 + 4\pi d = \mathcal{L}_2 = l_1 + d$$
$$l_2 = \frac{1}{2}(l_1 + d - \pi \cdot 4d)$$
$$\mathcal{L}_3 = l_2 + 4d$$

$n = 5$
$$\mathcal{W}_5 = \mathcal{W}_4$$
$$2l_3 + 16\pi d = \mathcal{L}_4 = l_2 + 4d$$
$$l_3 = \frac{1}{2}(l_2 + 4d - \pi \cdot 16d)$$
$$\mathcal{L}_5 = l_3 + 16d$$

$n = 2$
$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$$
$$2w_1 + 2\pi d = \mathcal{W}_1 = w_0 + 0$$
$$w_1 = \frac{1}{2}(w_0 - \pi \cdot 2d)$$
$$\mathcal{W}_2 = w_1 + 2d$$

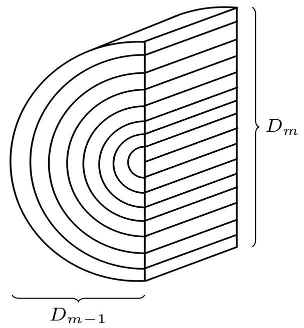
$n = 4$
$$\mathcal{L}_4 = \mathcal{L}_3$$
$$2w_2 + 8\pi d = \mathcal{W}_3 = w_2 + 2d$$
$$w_2 = \frac{1}{2}(w_1 + 2d - \pi \cdot 8d)$$
$$\mathcal{W}_4 = w_2 + 8d$$

$n = 6$
$$\mathcal{L}_6 = \mathcal{L}_5$$
$$2w_3 + 32\pi d = \mathcal{W}_5 = w_4 + 8d$$
$$w_3 = \frac{1}{2}(w_2 + 8d - \pi \cdot 32d)$$
$$\mathcal{W}_6 = w_3 + 32d$$

Mając tę postać, można już utworzyć wzór ogólny na l_m (oczywiście dla $m > 0$):

$$l_m = \frac{1}{2}(l_{m-1} + \lfloor 4^{m-2} \rfloor d - \pi \cdot 4^{m-1} d).$$

Rozwijając powyższą rekurencję (podstawiamy kolejno wzory pod l_{m-1}, potem l_{m-2} itd.), dostajemy sumę, którą można na powrót zwinąć, stosując wzór na sumę ciągu geometrycznego, i zastępujemy tym samym wzór



Rys. 4. Skrajny przypadek (kartki nie da się już złożyć)

rekurencyjny iteracyjnym:

$$l_m = \frac{1}{2^m} l_0 + d \left[\frac{1}{2^{m-1}} \frac{1-8^{m-1}}{1-8} \right] - \pi d \left[\frac{1}{2^m} \frac{1-8^m}{1-8} \right].$$

Wyobraźmy sobie teraz przypadek skrajny, po którego przekroczeniu wykonanie następnego zgięcia będzie niemożliwe (rys. 4).

Widać, że zachodzić musi:

$$l_m \geqslant 0.$$

Z tego warunku, po krótkich przekształceniach, otrzymujemy nierówność:

$$m \leqslant \log_8 \left(\frac{\frac{7}{d} l_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right).$$

Podobne wyprowadzenie przeprowadzamy dla szerokości w_u i otrzymujemy:

$$u \leqslant \log_8 \left(\frac{\frac{7}{2d} w_0 - 2 + \pi}{8\pi - 2} \right) + 1.$$

Wystarczy teraz określić liczbę zgięć wzdłuż krawędzi $\mathcal{L}$ i $\mathcal{W}$. Ponieważ liczba zgięć jest liczbą całkowitą oraz zachodzą nierówności postaci $m, u \leqslant \ldots$, mamy:

$$m = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{d} l_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor,$$
$$u = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{2d} w_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor.$$

Powyższe równości określają maksymalną liczbę zgięć kolejno dla krawędzi $\mathcal{L}$ i $\mathcal{W}$ (przy założeniu, że przy zginaniu jednej z krawędzi było możliwe zgięcie tej drugiej).

Jeśli $m > u$, mamy ciąg zgięć (np. tutaj $m = n + 3$):

$$\underbrace{\overset{1}{\mathcal{L}} \to \overset{1}{\mathcal{W}} \to \overset{2}{\mathcal{L}} \to \overset{2}{\mathcal{W}} \to \cdots \to \overset{u}{\mathcal{W}} \to \overset{m-2}{\mathcal{L}}}_{\text{Cały możliwy do wykonania ciąg zgięć}} \to \overset{m-1}{\mathcal{L}} \to \overset{m}{\mathcal{L}}.$$

Czyli całkowita liczba zgięć dla $m > u$ to $n = 2u + 1$.
Jeśli natomiast $m \leqslant u$, mamy ciąg zgięć (np. tutaj $m = u - 3$):

$$\underbrace{\overset{1}{\mathcal{L}} \to \overset{1}{\mathcal{W}} \to \overset{2}{\mathcal{L}} \to \overset{2}{\mathcal{W}} \to \cdots \to \overset{m}{\mathcal{L}} \to \overset{u-2}{\mathcal{W}}}_{\text{Cały możliwy do wykonania ciąg zgięć}} \to \overset{u-1}{\mathcal{W}} \to \overset{u}{\mathcal{W}}.$$

Czyli całkowita liczba zgięć dla $m \leqslant u$ to $u = 2m$. Ogólny wzór na n ma postać:

$$n = \begin{cases} 2u+1 & \text{dla } m > u \\ 2m & \text{dla } m \leqslant u \end{cases} \qquad \text{dla:} \begin{cases} m = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{d} l_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor \\ u = \left\lfloor \log_8 \left(\frac{\frac{7}{2d} w_0 - 2 + \pi}{\pi - \frac{1}{4}} \right) \right\rfloor \end{cases}$$

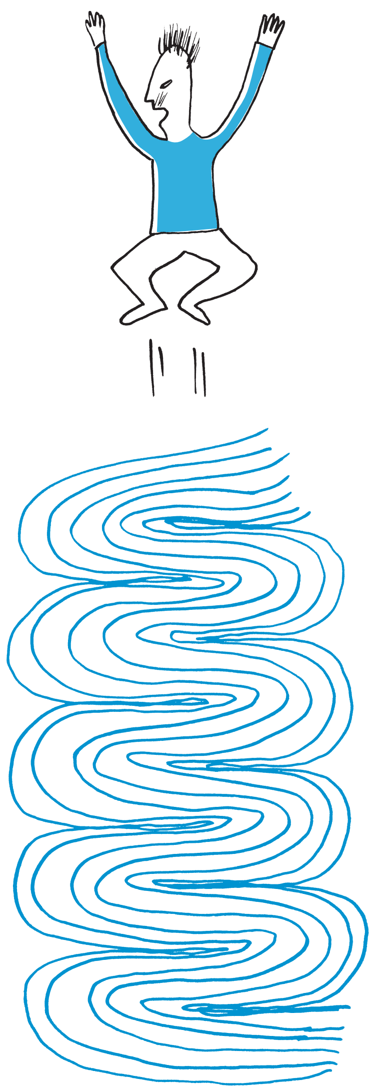
Przetestujmy teraz nasz algorytm. Biurowa kartka papieru w formacie A4 ma standardowo wymiary: $297 \times 210 \times 0{,}1$ mm. Podstawiając je odpowiednio do ustalonych wzorów, sprawdzimy, ile razy można zgiąć kartkę wzdłuż długości i szerokości (pamiętając jednocześnie, że długość w naszym problemie to krawędź, w poprzek której wykonujemy pierwsze zagięcie).

$$\text{dla } l_0 = 297 \text{ mm i } w_0 = 210 \text{ mm}$$
$$m = \lfloor 4{,}27 \rfloor = 4$$
$$u = \lfloor 3{,}77 \rfloor = 3$$
$$m > u \Rightarrow \boxed{n = 2u + 1 = 7}$$

$$\text{dla } l_0 = 210 \text{ mm i } w_0 = 297 \text{ mm}$$
$$m = \lfloor 4.103 \rfloor = 4$$
$$u = \lfloor 3.937 \rfloor = 3$$
$$m > u \Rightarrow \boxed{n = 2u + 1 = 7}$$

Widać, że kartkę papieru w formacie A4 można zgiąć co najwyżej 7 razy, co zgadza się z popularną miejską legendą.

Po przeprowadzeniu podobnych obliczeń dla kartki A3 o tej samej grubości ($297 \times 420 \times 0{,}1$ mm) okazało się, że bardziej opłacalnym jest przyjąć $l_0 = 297$ mm i $w_0 = 420$ mm (krótsza krawędź jest zginana jako pierwsza), co daje nam maksymalną liczbę zgięć równą 8.



Papierem na Księżyc. Dochodzimy do miejsca, w którym spełnimy obietnicę z tytułu. Spróbujmy ustalić wymiary kartki papieru o grubości $d = 0{,}1$ mm potrzebnej do zbudowania połączenia między powierzchniami Ziemi i Księżyca wyłącznie przez wielokrotne zginanie jej wpół. Średnia odległość między powierzchniami Ziemi i Księżyca wynosi około 376 291 km. Policzmy, ile razy należałoby złożyć naszą kartkę papieru, aby dosięgnąć do Księżyca.

$$D_n = S_{zk} = 376\,291 \text{ km} = 376\,291 \cdot 10^6 \text{ mm} = 0{,}1 \text{ mm} \cdot 2^n,$$
$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{376\,291 \cdot 10^6 \text{ mm}}{0{,}1 \text{ mm}} \right) \right\rceil = \lceil 41{,}775 \rceil = 42.$$

$n = 42$ jest liczbą parzystą, więc mamy przypadek $n = 2m$, czyli nastąpi taka sama liczba zgięć wzdłuż długości i szerokości $m = u = 21$. Kontynuujemy obliczenia, przywołując wzory na m i u, i otrzymujemy wymiary ($l_0 \times w_0$):

$$2546{,}85 \text{ au} \times 5093{,}7 \text{ au}$$

($1 \text{ au} \approx 150 \cdot 10^6$ km).

Układ Słoneczny. Chcąc wyobrazić sobie rozmiar naszej kartki, możemy porównać ją z rozmiarami Układu Słonecznego, którego promień szacowany jest na około $R_s = 4\,498\,252\,900$ km (średnia odległość Neptuna od Słońca). Porównajmy pole powierzchni kartki P_k z powierzchnią Układu Słonecznego P_s (a raczej polem powierzchni koła o krawędzi zarysowanej przez uśrednioną orbitę Neptuna):

$$P_k = l_0 \cdot w_0 = 2{,}903271 \cdot 10^{23} \text{ km}^2,$$
$$P_s = \pi R_s^2 = 6{,}356786 \cdot 10^{19} \text{ km}^2,$$
$$\frac{P_k}{P_s} = 4567{,}1995.$$

Przez fakt posiadania bez mała 4600-krotności powierzchni aktualnie zamieszkiwanego przez nas układu planetarnego oczywistym jest, że nasza kartka bez wątpienia zasługuje na miano megastruktury.

Dla zobrazowania skali wielkości naszej kartki możemy porównać ją z najodleglejszym od Ziemi obiektem wysłanym przez człowieka – sondą misji Voyager I (korzystając z danych na moment: 00:00 UTC 01.01.2025):

$$V_{v_I} = 16{,}9995 \, \frac{\text{km}}{\text{s}}, \qquad R_{v_I} = 24\,798\,697\,389 \text{ km}, \qquad t = \frac{\sqrt{\frac{P_k}{\pi}} - R_{v_I}}{V_{v_I}}.$$

Zakładając, że sonda będzie leciała ze stałą prędkością V_{v_I} – osiągnie punkt, w którym pole powierzchni $P_{v_I} = \pi R_{v_I}^2$ stycznego do niego koła (ze środkiem w Słońcu) będzie identyczne z polem naszej kartki papieru, w 2545 roku.

Alternatywy. Ostatecznie wartym nadmienienia jest fakt, iż powyższe ustalenia poprawne są wyłącznie dla składania naprzemiennego (wzdłuż krawędzi $\mathcal{L}$ i $\mathcal{W}$).

Analogiczną metodą Czytelnik może wyprowadzić wzór dla kolejnych złożeń równolegle do wyłącznie jednej, wybranej krawędzi kartki papieru. Tym sposobem ustalić można, na przykład, przewidywaną liczbę złożeń całej rolki papieru toaletowego.