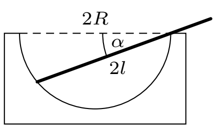
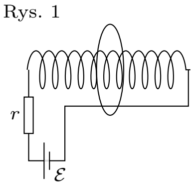
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2025



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 790, 791

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

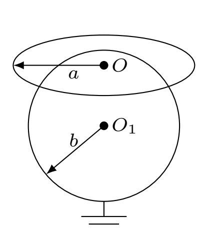
790. Jednorodny pręt o długości $2l$ opiera się na krawędzi nieruchomej, półkolistej czaszy o promieniu R (rys. 1). Jaki kąt α tworzy pręt z płaszczyzną poziomą w położeniu równowagi? Tarcie zaniedbujemy.

791. O jaką wielkość zmieni się natężenie prądu w kołowej pętli z nadprzewodnika, gdy nałożymy ją na długą zwojnicę podłączoną do baterii o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ (rys. 2). Całkowity opór obwodu ze zwojnicą wynosi r, liczba zwojów N, współczynnik samoindukcji zwojnicy L_0, a pętli L. Indukcję wzajemną zaniedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2024

Przypominamy treść zadań:

782. Potencjał w środku odosobnionego, naładowanego, drucianego pierścienia o promieniu a wynosi φ_O. Pierścień ten zbliżono do uziemionej przewodzącej sfery o promieniu b tak, że tylko środek pierścienia znajduje się na powierzchni sfery (rys. 3). Znaleźć ładunek indukowany na sferze.



Rys. 3

783. Mała kulka o masie m naładowana ładunkiem q zawieszona jest na nieważkiej i nierozciągliwej nici w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0 skierowanej pionowo. Kulkę odchylono o mały kąt z położenia równowagi i puszczono swobodnie. Po jakim czasie płaszczyzna wahań wahadła obróci się o kąt 2π? Maksymalna siła Lorentza działająca na kulkę jest mała w porównaniu z maksymalną siłą zawracającą. Nie uwzględniamy efektów związanych z obrotem Ziemi.

782. Potencjał w środku odosobnionego pierścienia jest równy $\varphi_O = \sum_i kq_i/a = kQ/a$, stąd ładunek pierścienia $Q = a\varphi_O/k$. Potencjał uziemionej sfery oraz w jej wnętrzu wynosi zero i pochodzi od naładowanego pierścienia oraz ładunków indukowanych na sferze. Ładunki indukowane nie są rozłożone równomiernie, dlatego najłatwiej jest wyrazić potencjał w środku sfery:

$$0 = kQ/\sqrt{a^2+b^2} + kQ_{\text{ind}}/b.$$

Szukany ładunek indukowany dany jest wzorem:

$$Q_{\text{ind}} = -Qb/k\sqrt{a^2+b^2} = -4\pi\varepsilon_0 ab\varphi_O/\sqrt{a^2+b^2}.$$

783. Będziemy zakładać, że ładunek q jest dodatni, a pole magnetyczne skierowane w górę. Wprowadźmy układ współrzędnych, którego początek umieszczamy w punkcie zawieszenia, oś z skierowana jest pionowo w górę, a osie x i y leżą w płaszczyźnie poziomej. Równanie ruchu kulki ma postać:

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_L,$$

gdzie $\boldsymbol{a} = d^2\boldsymbol{r}/dt^2$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ jest wektorem położenia kulki, $|\boldsymbol{r}| = l$ jest długością wahadła, siła naprężenia nici $\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{r}/l$. Dla małych drgań $T \cong mg$. W tym przybliżeniu kulka porusza się praktycznie w płaszczyźnie poziomej, a składowe siły Lorentza wynoszą (rys. 4):

$$F_{Lx} = F_L \sin\beta = qv_yB_0, F_{Ly} = -F_L\cos\beta = -qv_xB_0, F_{Lz} = 0.$$

Równanie ruchu w rzucie na osie x, y ma postać:

$$(1) \qquad ma_x = -mgx/l + qv_yB_0, ma_y = -mgy/l - qv_xB_0.$$

W nieobecności pola magnetycznego wahadło wykonuje drgania w jednej płaszczyźnie z częstością $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Gdy pole $B_0 \neq 0$, siła Lorentza zakrzywia tor kulki, ale ponieważ nie wykonuje pracy, maksymalne wychylenie nici z położenia równowagi pozostaje stałe. Z zasady zachowania energii

$$\frac{m(v_{\max})^2}{2} = mgl\,(1-\cos\alpha_{\max}) = 2mgl\sin^2\left(\frac{\alpha_{\max}}{2}\right) = \frac{mgl(\alpha_{\max})^2}{2},$$

$$v_{\max} = \alpha_{\max}\sqrt{gl}.$$

Ponieważ maksymalna siła Lorentza jest mała w porównaniu z maksymalną siłą zawracającą $F_{Z\max}$,

$$\frac{F_{L\max}}{F_{Z\max}} = \frac{qB_0v_{\max}}{mg\alpha_{\max}} = \frac{qB_0}{m}\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\omega_B}{\omega_0} \ll 1,$$

gdzie $\omega_B = qB_0/m$ jest częstością ruchu obrotowego cząstki naładowanej, poruszającej się po okręgu w jednorodnym polu magnetycznym. W czasie półokresu drgań pole magnetyczne w niewielkim stopniu zakrzywia trajektorię kulki.

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń, możemy przepisać równania (1) w postaci:

$$(2) \quad d^2x/dt^2 = -\omega_0{}^2x + \omega_B dy/dt, \quad d^2y/dt^2 = -\omega_0{}^2y - \omega_B dx/dt.$$

Równania (2) są równaniami liniowymi, obowiązuje więc zasada superpozycji – dowolna kombinacja liniowa dwóch rozwiązań tych równań jest też rozwiązaniem.

Gdy nie ma pola magnetycznego, równania (2) są niezwiązane. Dwa rozwiązania opisujące drgania w płaszczyznach xz i yz mają postać:

$$(3) \quad x_1 = A\cos\omega t,\ y_1 = 0 \text{ oraz } x_2 = 0,\ y_2 = A\sin\omega t, \text{ gdzie } \omega = \omega_0.$$

Dodając i odejmując stronami te rozwiązania, otrzymujemy rozwiązania opisujące ruchy wahadła stożkowego w kierunkach przeciwnym i zgodnym ze wskazówkami zegara:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &x_3 = x_1 + x_2 = A\cos\omega t,\ y_3 = y_1 + y_2 = A\sin\omega t;\\ &x_4 = A\cos\omega t,\ y_4 = -A\sin\omega t \end{aligned}$$

i odwrotnie $x_1 = (x_3 + x_4)/2$.

W przypadku $B_0 \neq 0$ rozwiązania (3) nie spełniają już równań (2), natomiast rozwiązania (4) spełniają je, gdy $\omega^2 = \omega_0{}^2 - \omega_B\omega$, stąd

$$\omega = -\omega_B/2 \pm \sqrt{\omega_0{}^2 + \omega_B{}^2/4} \cong -\omega_B/2 \pm \omega_0.$$

Zgodnie z zasadą superpozycji równania (2) spełniają również rozwiązania:

$$x = \frac{(x_3+x_4)}{2} = A\left[\cos\left(\omega_0 + \frac{\omega_B}{2}\right) + \cos\left(\omega_0 - \frac{\omega_B}{2}\right)\right]$$

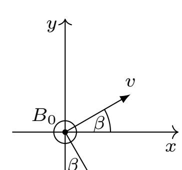
$$= A\cos\omega_0\cos\left(\frac{\omega_B}{2}\right),$$

$$y = \frac{(y_3+y_4)}{2} = A\sin\omega_0\sin\left(\frac{\omega_B}{2}\right).$$

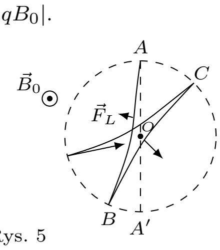
Równania opisują drgania wahadła z częstością ω_0 w płaszczyźnie, która sama obraca się z częstością $\omega_B/2$. Tor kulki w płaszczyźnie xy ilustruje rys. 5.

Szukany czas obrotu płaszczyzny wahań o kąt 2π wynosi:

$$t = 4\pi/\omega_B = 4\pi m/|qB_0|.$$



Rys. 4



Rys. 5

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 883 ($WT = 1{,}82$) i 884 ($WT = 1{,}61$) z numeru 6/2024

Michał Adamaszek	Kopenhaga	46,32
Szymon Kitowski	Warszawa	41,11
Witold Bednarek	Łódź	40,58
Mikołaj Pater		39,58
Krzysztof Zygan	Lubin	39,38
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,18
Andrzej Kurach	Ryjewo	33,24
Jędrzej Biedrzycki		32,29
Krzysztof Kamiński	Pabianice	30,48

Pan Michał Adamaszek, autor wielu znakomitych zadań – teraz już Weteran do kwadratu: trzykroć trzy razy czterdzieści cztery!

Zadania z matematyki nr 893, 894

Redaguje Marcin E. KUCZMA

893. Punkty A, B, C, D, E leżą w tym porządku na linii prostej, przy czym $CA = CE$, $CB = CD$. Poza tą prostą, po jednej jej stronie, leżą punkty K i L takie, że trójkąty AKB i DLE mają ostre kąty przy wierzchołkach A, B i D, E, a suma miar tych czterech ostrych kątów wynosi $180°$. Proste KB i LD przecinają się w punkcie N; proste AK i EL przecinają się w punkcie M; punkty M, N leżą po różnych stronach prostej KL, a ponadto $MN \perp AE$. Dowieść, że $CK = CL$.

894. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych (x, y, z) spełniające równanie
$$\frac{x + y + xyz}{yz + 1} = \frac{2025}{44}\,.$$

Zadanie 894 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2024

Przypominamy treść zadań:

885. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą nieparzystą i niech $M = \{1, 2, \ldots, p{-}1\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f\colon\ M \to M$ takich, że dla każdego $x \in M$ liczba $xf(f(x)) - 1$ dzieli się przez p.

886. W trójkącie ostrokątnym o bokach długości a, b, c kąty wewnętrzne przy przeciwległych wierzchołkach mają miary (odpowiednio) α, β, γ. Wykazać, że wartość ilorazu
$$\frac{a\,\cos\alpha + b\,\cos\beta + c\,\cos\gamma}{a + b + c}$$
wyraża się przez długości promieni okręgów opisanego i wpisanego. Wyjaśnić, czy uzyskany wzór jest słuszny również dla trójkątów rozwartokątnych.

885. Każdy element $x \in M$ ma w zbiorze M dokładnie jeden element odwrotny (mod p), który będziemy oznaczać x^{-1}; tj. taki, że $xx^{-1} \equiv 1 \pmod p$. Dany w zadaniu warunek przepisujemy jako równanie

$$(1)\qquad ff(x) = x^{-1} \quad \text{dla wszystkich } x \in M$$

(notacja „oszczędna”: $f \circ f = ff$). Gdy funkcja f spełnia równanie (1), wówczas $ffff(x) = x$, skąd wniosek, że f jest bijekcją zbioru M na M – czyli jest permutacją zbioru M – który wobec tego rozpada się na rozłączne cykle tej permutacji. Skoro $ffff$ jest identycznością, długość cyklu może wynosić jedynie 1, 2 lub 4.

Gdy x wchodzi do cyklu długości 1 lub 2, to $ff(x) = x$, więc zgodnie z (1) $x = x^{-1}$, co oznacza, że $x = 1$ lub $x = p{-}1$. Działanie funkcji f w obrębie zbioru $\{1, p{-}1\}$ może mieć jedną z dwóch postaci:

$$(2)\qquad [1 \mapsto 1,\ p{-}1 \mapsto p{-}1] \quad\text{lub}\quad [1 \mapsto p{-}1 \mapsto 1].$$

Pozostała część zbioru M, czyli zbiór $L = \{2, \ldots, p{-}2\}$ musi być już sumą cykli długości 4. Tak więc $p \equiv 3 \pmod 4$; dla $p \equiv 1 \pmod 4$ nie istnieje ani jedna funkcja f o badanej własności.

Dalej przyjmijmy, że $p = 4n + 3$ (dla pewnego $n \in \mathbf{N}$); więc L to suma n cykli długości 4.

Z każdej pary $\{x, x^{-1}\}$ wybierzmy jeden element – np. mniejszą liczbę. Wybrane elementy utworzą zbiór (mocy $2n$), który nazwiemy K (przykładowo, dla $p = 11$ zbiór $K = \{2, 3, 5, 7\}$). Każdy 4-cykl zawiera dwa elementy $a, b \in K$ oraz ich odwrotności; przy tym działanie f w takiej czwórce ma jedną z dwóch postaci:

$$(3)\quad [\,a \mapsto b \mapsto a^{-1} \mapsto b^{-1} \mapsto a\,] \text{ lub } [\,a \mapsto b^{-1} \mapsto a^{-1} \mapsto b \mapsto a\,].$$

Możliwe rozbicia zbioru L na n dopuszczalnych czwórek odpowiadają rozbiciom K na n par $\{a, b\}$. Jest $(2n-1)!!$ takich rozbić. [Uzasadnienie: bierzemy najmniejszą liczbę $a \in K$ i łączymy ją w parę z dowolnym innym elementem $b \in K$ ($2n - 1$ możliwości); bierzemy najmniejszą liczbę różną od a, b i łączymy ją w parę z dowolnym niewykorzystanym elementem ($2n - 3$ możliwości) itd.]. Uzyskaną wartość mnożymy przez 2^n (by uwzględnić swobodę wyboru jednej z opcji (3) w każdej z n czwórek). To daje liczbę dopuszczalnych permutacji w obrębie zbioru L. Jeszcze jedno pomnożenie przez 2 (uwzględniające wybór (2) w zbiorze $\{1, p{-}1\}$) daje ostateczny wynik: liczba funkcji f, o jakie pyta zadanie, wynosi 0, gdy p ma postać $4k + 1$, oraz $2^{n+1}(2n-1)!!$, gdy $p = 4n + 3$.

886. Gdy trójkąt ABC jest ostrokątny, środek O okręgu opisanego leży wewnątrz niego. Odległości punktu O od boków a, b, c oznaczmy przez d_a, d_b, d_c. W trójkącie OBC (równoramiennym) $d_a = R\cos\alpha$ jest wysokością, a jego pole wynosi $\frac{1}{2}ad_a$. Analogicznie wyrażają się pola trójkątów OCA i OAB; suma tych trzech pól to pole trójkąta ABC, wyrażające się też jako iloczyn $\frac{1}{2}(a + b + c)r$ (R i r to promienie okręgów opisanego i wpisanego). Zatem
$$\tfrac{1}{2}aR\cos\alpha + \tfrac{1}{2}bR\cos\beta + \tfrac{1}{2}cR\cos\gamma = \tfrac{1}{2}(a + b + c)r,$$
czyli
$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a + b + c} = \frac{r}{R}\,.$$
Ten wzór jest nadal słuszny, gdy trójkąt ABC jest rozwartokątny; np. $\alpha > 90°$. Wtedy $\cos\alpha < 0$, odległość d_a równa jest nie $R\cos\alpha$, lecz $-R\cos\alpha$; ale też trójkąt OBC leży na zewnątrz trójkąta ABC i jego pole należy odjąć od sumy pól trójkątów OCA, OAB, obliczając pole ABC. Minusy się redukują, wynik r/R pozostaje w mocy. [Można było od razu na starcie określić d_a jako odległość opatrzoną znakiem (*signed distance*), wtedy rozważanie przypadków staje się zbędne].

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.