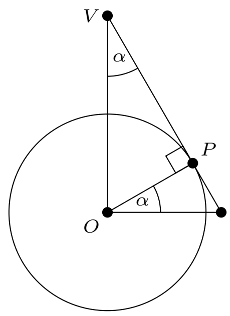
**Droga na skróty.** Podzielę się jeszcze jednym rozwiązaniem. Otóż styczną do *okręgu* jest znacznie łatwiej wyznaczyć niż styczną do innej elipsy:

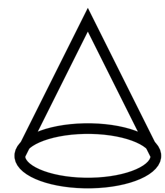



Przyjmijmy, że na okręgu jednostkowym wybraliśmy punkt styczności $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, co we współrzędnych biegunowych wyraża się po prostu jako $(\alpha : 1)$, i szukamy punktu przecięcia $V$ stycznej z osią $y$. Rzut oka na kąty na rysunku mówi nam, że $V = (0, \frac{1}{\sin\alpha})$.

Ale do czego ta obserwacja może się przydać? Otóż elipsę o półosiach 2 i 1 możemy otrzymać, odpowiednio rozciągając okrąg jednostkowy, lub ściślej, dokonując skalowania w osi $x$. Przy takim przekształceniu styczna do okręgu przechodzi na styczną do powstałej elipsy. Tak się składa, że TikZ pozwala na dowolne skalowanie obu osi, więc wystarczy naprawdę prosty kod. Oprócz koła jednostkowego rysujemy odcinki z punktu $(0, \frac{1}{\sin\alpha})$ do punktów o współrzędnych biegunowych $(\alpha : 1)$ i $(180° - \alpha : 1)$, a następnie całość rozciągamy dwukrotnie. Jeśli chcemy otrzymać ten sam rysunek co poprzednio, przyjmujemy $\alpha = \arcsin(1/3) \approx 19°$. Voilà:

```
\draw[xscale=2]
    (0,0) circle [radius = 1]
    (α:1) -- (0,{1/sin(α)}) -- (180-α:1);
```

**Da się lepiej?** Na koniec mam dla Czytelnika pytanie: czy umiesz to zrobić jeszcze prościej? Może znasz narzędzie komputerowe, w którym łatwo jest modelować trójwymiarowy stożek i narysować jego rzut? A może nie warto kombinować? Po prostu narysujmy mniejszy i smuklejszy stożek, używając grubszej kreski! Jak mawiał mój nauczyciel geometrii, „każde trzy punkty są współliniowe, jeśli prosta jest wystarczająca gruba”.



```
\draw[line width=4]
    (0,0) ellipse [x radius = 1.5, y radius = 0.6]
    (1.5,0) -- (0,3) -- (-1.5,0);
```

# O konstruowaniu środka okręgu linijką

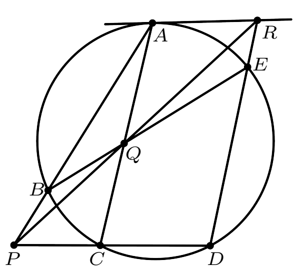
*Stanisław MAJCHRZAK**


*Student, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego
Laureat brązowego medalu w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego w roku 2021


W artykule *Prosto w środek* z $\Delta^8_{15}$ autor, Łukasz Rajkowski, pokazał, dlaczego środka okręgu nie można skonstruować przy użyciu wyłącznie linijki. Nie musi to być jednak prawdą, jeśli na kartce oprócz okręgu dane są jeszcze inne figury. Poniżej podamy sposób na skonstruowanie środka okręgu linijką w kilku takich sytuacjach. Wcześniej musimy jednak przedstawić pewne konstrukcje pomocnicze. W każdej z nich będziemy posługiwać się wyłącznie linijką.

*Konstrukcja 1.* Znając pięć punktów okręgu $\omega$, skonstruować styczną do $\omega$ w jednym z tych punktów.

Niech tymi punktami będą $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Przecinamy $AB$ i $CD$ w $P$, $AC$ i $BE$ w $Q$ oraz $PQ$ i $DE$ w $R$. Wówczas prosta $AR$ jest szukaną styczną (rys. 1).



Rys. 1

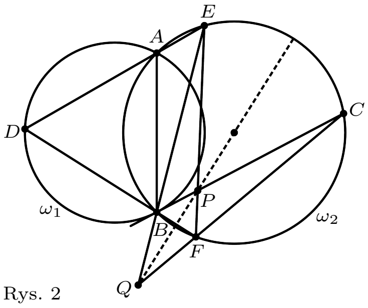
Podkreślmy, że do przeprowadzenia powyższej konstrukcji nie potrzebowaliśmy mieć narysowanego całego okręgu $\omega$ – wystarczyło tylko pięć znajdujących się na nim punktów. Uzasadnienie poprawności wymaga znajomości twierdzenia Pascala (patrz *Deltoid* z $\Delta^9_{14}$). Zostawiamy je Czytelnikowi, podobnie jak rozwiązanie następującego problemu:

*Konstrukcja 2.* Znając pięć punktów okręgu $\omega$, dla danej prostej $\ell$ przechodzącej przez jeden z nich wyznaczyć drugi punkt przecięcia $\ell$ i $\omega$.

W przypadku problemów ze znalezieniem rozwiązania polecam poszukać go w $\Delta^6_{17}$. Jesteśmy już gotowi do znalezienia środka okręgu samą linijką, jeśli mamy do dyspozycji jeszcze jeden, przecinający go okrąg.

*Konstrukcja 3.* Skonstruować środek jednego z dwóch okręgów mających dwa punkty wspólne.

Oznaczmy te okręgi przez $\omega_1$ i $\omega_2$, a ich punkty przecięcia przez $A$ i $B$. Korzystając z konstrukcji 1, konstruujemy styczną do $\omega_1$ w punkcie $B$ i przecinamy z $\omega_2$ w $C$. Przez $A$ rysujemy prostą, która przecina $\omega_1$ w $D$,



Rys. 2

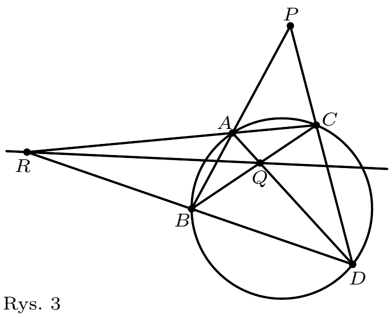
a $\omega_2$ w $E$. Oznaczmy przez $F$ drugi punkt przecięcia prostej $BD$ z $\omega_2$. Na koniec niech $P$ będzie przecięciem $BC$ i $EF$, a $Q$ przecięciem $BE$ i $CF$. Wówczas

$$\sphericalangle EFB = \sphericalangle BAD = 180^\circ - \sphericalangle DBA - \sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle DBA - \sphericalangle ABC = \sphericalangle CBF.$$

Oznacza to, że $EB = CF$, a prosta $PQ$ zawiera średnicę $\omega_2$ (rys. 2).
Po wybraniu innej prostej przechodzącej przez $A$ skonstruujemy inną średnicę, i w konsekwencji środek $\omega_2$.

Czytelnik z pewnością sam bez problemu wymyśli konstrukcje środka okręgu przy zadanych dwóch okręgach stycznych, a także przy zadanych dwóch okręgach współśrodkowych.

W kolejnych konstrukcjach przyda się kilka pojęć.



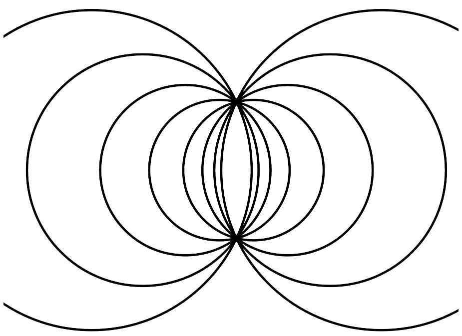
Rys. 3

Rozważmy okrąg $\omega$ i dowolny punkt $P$ nieleżący na tym okręgu. Przez punkt $P$ poprowadźmy dwie sieczne, które przecinają $\omega$ w $A$ i $B$ oraz $C$ i $D$. Niech proste $AD$ i $BC$ przecinają się w $Q$, a $AC$ i $BD$ przecinają się w $R$. Prostą $QR$ będziemy nazywać *biegunową* punktu $P$ względem okręgu $\omega$ (rys. 3). Zauważmy, że może ona być wyznaczona wyłącznie przy użyciu linijki, nawet jeśli okrąg $\omega$ dany jest tylko w pięciu punktach (w takim przypadku korzystamy z konstrukcji 2).

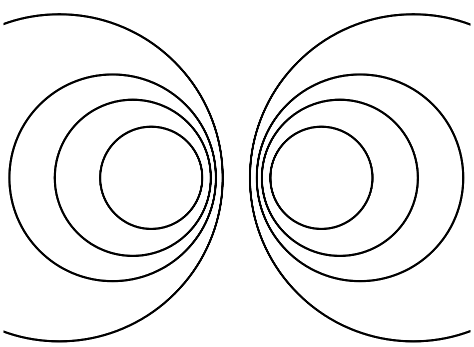
Biegunowe mają liczne i użyteczne własności. Na przykład jeśli $P$ leży na zewnątrz $\omega$, to biegunowa $P$ przechodzi przez punkty styczności prostych stycznych do $\omega$ przechodzących przez $P$. Stąd dla punktów leżących na okręgu przyjmujemy, że biegunową jest styczna w tym punkcie. Zatem, wyznaczając biegunową, możemy skonstruować styczną do okręgu przechodzącą przez punkt na nim nieleżący.

Czytelnikowi Zainteresowanemu tematem biegunowych polecamy poświęcony im *Kącik Początkującego Olimpijczyka* w $\Delta^1_{23}$.

Inną użyteczną własnością jest fakt, że każda sieczna okręgu $\omega$ przechodząca przez $P$ przecina $\omega$ w takich punktach $A$, $B$ oraz biegunową $P$ w takim $Q$, że $AB$ dzieli harmonicznie $PQ$, tzn. $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$. Czytelnik może spróbować wymyślić, jak podzielić harmonicznie odcinek przy użyciu wyłącznie linijki (podpowiedź: warto przypomnieć sobie twierdzenia Cevy i Menelaosa).


Rys. 4

Kolejnym przydatnym obiektem będzie *pęk okręgów*. Jest to rodzina okręgów, którą jednoznacznie wyznaczają dwa niewspółśrodkowe okręgi. Pęki okręgów mają taką własność, że jeśli dwa okręgi należące do pęku przecinają się w dwóch punktach, to każdy okrąg z tego pęku przechodzi przez te dwa punkty (rys. 4), jeśli są styczne, to wszystkie są do siebie styczne w tym samym punkcie, oraz jeśli się nie przecinają, to żadne dwa się nie przecinają (rys. 5). Na potrzeby tego artykułu potraktujmy pęki okręgów jako „czarną skrzynkę”, zainteresowanych szczegółami odsyłam do krótkiego tekstu w tym wydaniu *Delty* (s. 20), który jest im poświęcony.

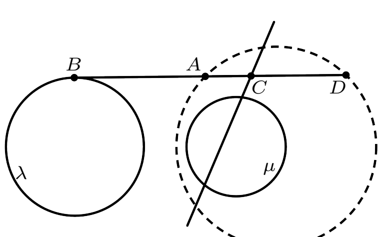

Rys. 5

Zachodzi następujące twierdzenie:

**Twierdzenie.** *Biegunowe dowolnego punktu $P$ względem okręgów należących do jednego pęku są współpękowe.*

Punkt ten będziemy nazywali *biegunowo sprzężonym* do punktu $P$ względem odpowiedniego pęku. Ponieważ pęk jest wyznaczony przez dwa okręgi, możemy też mówić o dwóch punktach sprzężonych względem pary okręgów. Powyższe twierdzenie wykorzystamy w kolejnych konstrukcjach. Ponieważ linijka nie pozwala na narysowanie okręgu, przez wyrażenie „skonstruować okrąg” będziemy określać wyznaczenie dowolnie wielu jego punktów.

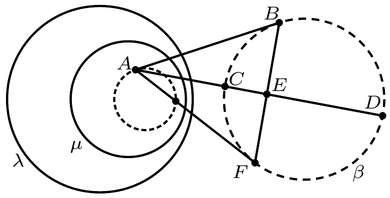
*Konstrukcja 4.* Mając dane okręgi $\lambda$ i $\mu$ oraz punkt $A$ na zewnątrz jednego z nich, skonstruować okrąg przechodzący przez $A$ oraz należący do pęku wyznaczanego przez te okręgi.



Rys. 6

Niech $A$ leży na zewnątrz okręgu $\lambda$. Z punktu $A$ skonstruujmy styczną do $\lambda$ w punkcie $B$. Następnie niech $C$ będzie punktem biegunowo sprzężonym do punktu $B$ względem $\lambda$ i $\mu$ (zauważmy, że leży na $AB$). Konstruujemy teraz taki punkt $D$, że $AD$ dzieli harmonicznie $BC$. Punkt $D$ jest drugim obok $A$ punktem szukanego okręgu (rys. 6). Gdyby okazało się, że $D = C = A$ (tzn. gdyby $AB$ było styczne do konstruowanego okręgu), to na początku konstrukcji powinniśmy wziąć „drugą styczną” z $A$ do $\lambda$. Całą procedurę możemy teraz powtórzyć, biorąc $D$ jako punkt startowy (i oczywiście punkt styczności do $\lambda$ różny od $B$).

*Konstrukcja 5.* Mając dane okręgi $\lambda$ i $\mu$ oraz punkt $A$ leżący wewnątrz nich, skonstruować okrąg przechodzący przez $A$ oraz należący do pęku wyznaczanego przez te okręgi.




Rys. 7

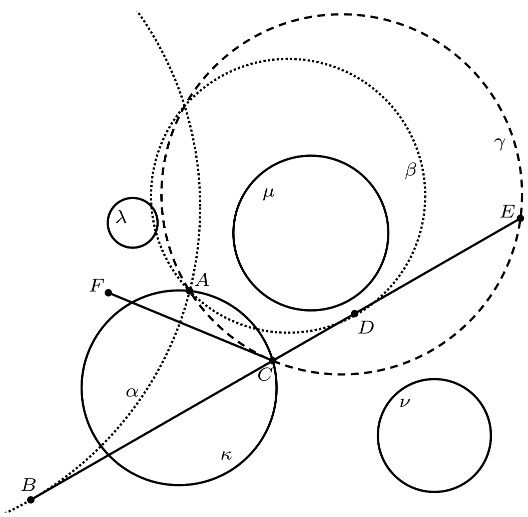
W tym przypadku wyznaczamy punkt $B$, biegunowo sprzężony do $A$. Punkt ten leży na zewnątrz okręgów $\lambda$ i $\mu$, zatem możemy skonstruować dowolną liczbę punktów okręgu $\beta$ przechodzącego przez $B$ i należącego do pęku wyznaczanego przez te dwa okręgi (konstrukcja 4). Punkt $A$ leży na zewnątrz $\beta$. Pokażemy, jak wykorzystać ten „dziurkowany” okrąg do odtworzenia konstrukcji 4.

Problematyczny jest tylko pierwszy krok, czyli konstrukcja stycznej do $\beta$. Aby ją wyznaczyć, postępujemy następująco. Niech $C$ będzie różnym od $B$ punktem okręgu $\beta$. Wyznaczmy punkt $D$ przecięcia prostej $AC$ z okręgiem $\beta$ (korzystamy z konstrukcji 2). Dalej konstruujemy taki $E$ na $AC$, że $AE$ dzieli harmonicznie $CD$. Prosta $BE$ jest biegunową punktu $A$ względem $\beta$, więc jej drugi punkt przecięcia z $\beta$ to taki punkt $F$ (rys. 7), że $AF$ jest styczna do $\beta$ (ponownie skorzystaliśmy z konstrukcji 2). Teraz na $AF$ możemy wyznaczyć drugi obok $A$ punkt szukanego okręgu i powtórzyć procedurę, rozpoczynając od tego punktu.

*Konstrukcja 6.* Skonstruować środek przynajmniej jednego z czterech okręgów, z których żadne trzy nie należą do jednego pęku.

Oznaczmy dane okręgi przez $\kappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Zakładamy, że żadne dwa z nich nie mają punktów wspólnych ani nie są współśrodkowe.

Wybierzmy punkt $A$ na $\kappa$. Konstruujemy okręgi $\alpha$ i $\beta$ przechodzące przez $A$ oraz należące do pęków wyznaczonych odpowiednio przez $\lambda$ i $\mu$ oraz $\mu$ i $\nu$. Następnie wybieramy taki punkt $B$ na $\alpha$, że skonstruowana styczna w $B$ do $\alpha$ przecina okrąg $\kappa$. Niech $C$ będzie tym punktem przecięcia. Niech ponadto $D$ i $F$ będą punktami biegunowo sprzężonymi do punktów odpowiednio $B$ i $C$ względem pęku wyznaczonego przez okręgi $\alpha$ i $\beta$ (rys. 8).



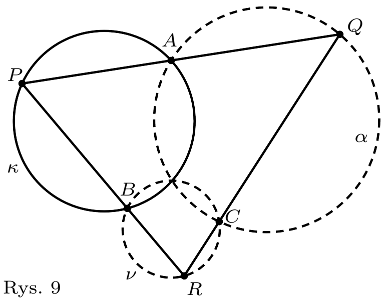

Rys. 8

Zauważmy, że $E$ taki, że $CE$ dzieli harmonicznie $BD$, leży na okręgu $\gamma$ należącym do pęku wyznaczonego przez $\alpha$ i $\beta$ oraz przechodzącym przez $C$ (rozważamy ten okrąg, ale go nie konstruujemy). Ponadto prosta $CF$ jest styczna do $\gamma$. Czytelnik, analizując ponownie rysunek 2, przekona się, że mamy wystarczająco danych, aby zastosować konstrukcję 3 dla okręgów $\gamma$ i $\kappa$ i uzyskać średnicę $\kappa$. Drugą średnicę konstruujemy, zaczynając od innego punktu $A$.

Odnotujmy, że konstrukcję da się powtórzyć, jeśli jeden z okręgów (u nas okrąg $\mu$) jest dany tylko w pięciu punktach. Wynika to z możliwości wykonania konstrukcji, gdy okrąg $\mu$ jest dany tylko w 5 punktach, co z kolei jest konsekwencją poczynionej wcześniej uwagi o konstruowalności biegunowych.

*Konstrukcja 7.* Skonstruować środek przynajmniej jednego z trzech okręgów nienależących do jednego pęku.

Oznaczmy te okręgi przez $\kappa$, $\lambda$, $\mu$. Wybieramy punkt $A$ na $\kappa$ i konstruujemy okrąg $\alpha$ należący do pęku wyznaczanego przez okręgi $\lambda$ i $\mu$ oraz przechodzący przez $A$. Na okręgach $\kappa$ i $\alpha$ wybieramy odpowiednio punkty $B$ i $C$. Następnie prowadzimy dowolną prostą przez $A$ i oznaczamy jej punkty przecięcia z $\kappa$ i $\alpha$ przez $P$ i $Q$, odpowiednio. Zauważmy, że jeśli prosta $PQ$ będzie obracać się wokół punktu $A$, to punkt przecięcia $R$ prostych $PB$ i $QC$ będzie zakreślał okrąg (jest to okrąg opisany na trójkącie, którego wierzchołkami są punkty $B$, $C$ i różny od $A$ punkt przecięcia $\alpha$ i $\kappa$). Oznaczmy go przez $\nu$. Rysując zatem kolejne położenia prostej $PQ$, będziemy mogli konstruować kolejne punkty okręgu $\nu$ (rys. 9). Żadne trzy spośród $\kappa$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ nie należą do jednego pęku. Stąd po skonstruowaniu pięciu punktów $\nu$ możemy powtórzyć konstrukcję 6.




Rys. 9

Czytelnikowi zastanawiającemu się, co z przypadkiem rozłącznych okręgów należących do jednego pęku, odpowiem, że wówczas środka okręgu nie da się skonstruować. Omówienie tego zagadnienia byłoby jednak zbyt długie, aby można je było zawrzeć w tym artykule.