Niedostępna teoria

Spróbujmy się im jednak bliżej przyjrzeć. Rozważmy listę wszystkich możliwych zdań, które są realizowane w strukturze prawdziwych liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Na tej liście pojawią się wszystkie oczywistości pokroju $0 = 0$, jak i wszystkie najbardziej wysublimowane twierdzenia arytmetyczne. Wśród nich będą z całą pewnością nieudowodnione i niesformułowane dotychczas twierdzenia teorii liczb. Jest dość jasne, że nie da się wypisać wszystkich tych zdań – choćby dlatego, że jest ich nieskończenie wiele. Ale możemy zadać sobie pytanie, czy istnieje jakikolwiek przepis, który powie nam, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy nie. Taki przepis moglibyśmy zaimplementować jako program komputerowy i dostawać (być może po bardzo długim czasie) odpowiedzi – tak lub nie.

Co ciekawe, od prawie stu lat wiemy, że taki algorytm nigdy nie powstanie. Jest to konsekwencja I twierdzenia Gödla o niezupełności. Mówi ono mniej więcej tyle, że każda teoria zupełna, która potrafi odtworzyć arytmetykę, jest nieobliczalna. Zupełna teoria to taka, która jest zbiorem *wszystkich* zdań prawdziwych w pewnej strukturze, a nieobliczalność oznacza, że nie istnieje taki algorytm, którego działanie opisaliśmy powyżej. Umiejętność odtworzenia arytmetyki jest trochę bardziej subtelną własnością, ale być może zadowoli nas stwierdzenie, że praktycznie każda niebanalna teoria, z którą obcuje się w matematyce, tę zdolność posiada.

Nasza sytuacja wygląda następująco: mamy ograniczony dostęp do zasad, którymi rządzą się prawdziwe liczby naturalne. Posługujemy się zatem obliczalnymi teoriami, takimi jak arytmetyka Peano, godząc się z konieczności na większą ogólność. A co to mówi o Matematyce? W opinii autora jeden wniosek jest jasny. Matematyka nie jest taka prosta, na jaką może wyglądać, nawet na poziomie tak podstawowym jak arytmetyka. Ale nie powinno nas to zaskakiwać. Zaskakiwać może jednak to, że nie wszystko, nawet o liczbach naturalnych, można udowodnić. A więc Matematyka nie jest czarno-biała. Ma swoje szarości…

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1798. W pola tabeli 9×9 wpisano liczby całkowite od 1 do 81 (w każdym polu znajduje się jedna liczba, wszystkie liczby są różne). Okazało się, że dowolne dwie liczby różniące się o 3 znajdują się w sąsiednich polach. Udowodnić, że różnica liczb wpisanych w pewne dwa narożne pola jest podzielna przez 6.

M 1799. Pięć krawędzi pewnego czworościanu jest stycznych do sfery. Udowodnić, że istnieje inny zbiór pięciu krawędzi tego czworościanu, z których każda jest styczna do pewnej sfery (niekoniecznie tej samej co wcześniej).

M 1800. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n!)! \leqslant (n-1)!^{n!} \cdot n!^{(n-1)!}.$$

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1107. Z brzegu balkonu, na wysokości H nad ziemią, Jacek upuszcza pionowo ołowiane kulki, każda o masie m. Stara się jak najdokładniej trafić w wyznaczony punkt. Dysponuje najprecyzyjniejszą dostępną aparaturą. Na podstawie zasady nieoznaczoności Heisenberga oszacuj typową odległość od celu, w jakiej będą lądowały kulki Jacka?

F 1108. Belka o masie m i długości L spoczywa na poziomym, płaskim podłożu. Współczynnik tarcia między powierzchnią belki i podłożem wynosi μ. Belka jest jednorodna, tzn. masa przypadająca na jednostkę jej długości jest stała i wynosi ρ. Jaka jest najmniejsza wartość F_{min} poziomej, punktowej (tzn. przyłożonej w jednym punkcie belki) siły potrzebnej do przesunięcia belki? Przyspieszenie ziemskie wynosi g. Pomijamy różnicę wartości współczynników tarcia statycznego i kinetycznego.

Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 6

Rozwiązanie zadania M 1798.

Rozważmy reszty z dzielenia przez 3 liczb znajdujących się w czterech narożnych polach. Zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta, dla co najmniej dwóch z tych liczb $x < y$ rozważane reszty są równe, zatem różnica $y - x$ jest podzielna przez 3.

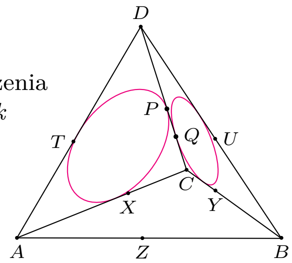
Pokolorujmy teraz pola tabeli w szachownicę, tak aby pola narożne były czarne. Rozważmy pola, w których wpisane są liczby

$$x,\ x+3,\ x+6, \ldots,\ y-3,\ y.$$

Każde dwie kolejne liczby w tym ciągu znajdują się w polach o wspólnym boku – to znaczy w polach o różnych kolorach. Oznacza to, że wszystkie liczby w naszym ciągu, które mają tę samą parzystość co x, znajdują się na czarnych polach, a cała reszta na polach białych. Ponieważ liczba y znajduje się na czarnym polu, ma taką samą parzystość jak x, to znaczy liczba $y - x$ jest parzysta. W szczególności liczba $y - x$ jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie zadania M 1799.

Niech sfera Ω będzie styczna do krawędzi AC, CB, BA, AD i BD w punktach, odpowiednio, X, Y, Z, T i U. Wtedy na podstawie twierdzenia o odcinkach stycznych (patrz *Kącik Przestrzenny* z Δ^3_{10}) $CX = CY$, $AX = AZ = AT$, $DT = DU$ oraz $BY = BZ = BU$. W szczególności dostajemy z tych równości, że $AC - AD = BC - BD$.



Pokażemy teraz, że ostatnia uzyskana równość daje nam styczność okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD. Istotnie, niech te okręgi będą styczne do krawędzi CD w punktach odpowiednio P i Q. Wtedy, korzystając z twierdzenia o odcinkach stycznych (ale już dla trójkąta), łatwo dostajemy, że $AC - AD = CP - PD$ i podobnie $BC - BD = CQ - QD$. Wobec tego zachodzi równość $CP - PD = CQ - QD$, która implikuje, że $PQ = 0$, czyli $P = Q$.

Biorąc teraz sferę zawierającą okręgi wpisane w trójkąty ACD i BCD, widzimy, że jest ona styczna do krawędzi AC, AD, DB, BC, CD.

Rozwiązanie zadania M 1800.

Dla $n = 1, 2$ zachodzi równość. Niech teraz $n \geqslant 3$ i połóżmy $A := (n-1)!$. Nierówność przyjmuje postać

$$(nA)! \leqslant A^{nA} \cdot (nA)^A.$$

Weźmy pod uwagę kilka (oczywistych) nierówności:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot A < A^A,$$

$$(A+1) \cdot (A+2) \cdot (A+3) \cdot \ldots \cdot (2A) < (2A)^A,$$

$$(2A+1) \cdot (2A+2) \cdot (2A+3) \cdot \ldots \cdot (3A) < (3A)^A,$$

$$(\ldots)$$

$$((n-1)A+1) \cdot ((n-1)A+2) \cdot ((n-1)A+3) \cdot \ldots \cdot (nA) < (nA)^A.$$

Mnożąc je wszystkie stronami, dostajemy:

$$(nA)! < A^A \cdot (2A)^A \cdot (3A)^A \cdot \ldots \cdot (nA)^A = A^{nA} \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)^A = \\ = A^{nA} \cdot (nA)^A.$$

Rozwiązanie zadania F 1107.

W polu grawitacyjnym o przyspieszeniu g kulka spadnie w odległości $s = \Delta x + \Delta v \cdot t$ od „celu", jeśli Jacek puścił ją z poziomą prędkością Δv z punktu przesuniętego o Δx od położenia dokładnie nad celem. Czas spadku:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Dokładność wyznaczenia punktu „startu", Δx, i dokładność wyznaczenia poziomej składowej pędu, Δp, ogranicza zasada Heisenberga:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar,$$

$\hbar$ jest stałą Plancka dzieloną przez 2π.

Oznacza to, że dla danego Δx dokładność, Δv, wyznaczenia prędkości (Jacek chce, żeby $v = 0$) ogranicza nierówność:

$$\Delta v = \frac{\Delta p}{m} \geqslant \frac{\hbar}{m\Delta x},$$

czyli

$$s = \Delta x + t\Delta v = \Delta x + t\frac{\Delta p}{m} \geqslant \Delta x + \frac{t\hbar}{m} \cdot \frac{1}{\Delta x}.$$

Funkcja $f(z) = z + Az^{-1}$ osiąga minimum dla $z = \sqrt{A}$. Jej wartość w minimum to $2\sqrt{A}$. Stąd ostatecznie po podstawieniu danych obliczmy, że typowa odległość upadku kulki od celu wyniesie:

$$s \geqslant 2\left(\frac{2H\hbar^2}{gm^2}\right)^{1/4}.$$

Zadanie zaczerpnięte ze zbioru *Berkeley Physics Problems With Solutions* (red. Min Chen).

Rozwiązanie zadania F 1108.

Belka naciska na podłoże siłą $N = mg$, a więc równoległe przesuwanie belki wymaga działania na nią poziomą siłą o wartości μN. Jeśli jednak siłę F przyłożymy prostopadle do belki, do jednego z jej końców, to belka będzie się obracała wokół pewnego ustalonego punktu (różnego od jej środka ciężkości). Na każdy odcinek o masie dm przesuwanej belki działa siła tarcia $\mu g dm$ skierowana przeciwnie do kierunku ruchu. Załóżmy, że punkt, wokół którego odbywa się obrót, znajduje się w odległości x od punktu przyłożenia siły F. Podczas obrotu o kąt $\delta\varphi$ praca siły F równa jest

$$W_F = Fx\delta\varphi.$$

Praca W_F jest równa pracy W_T wykonanej przez siły tarcia. Po obu stronach środka obrotu siły tarcia są skierowane przeciwnie, a wykonana przez każdą z nich praca jest równoważna pracy, jaką wykonałaby wypadkowa sił tarcia działających po każdej stronie środka obrotu przyłożona w połowie odpowiedniego odcinka belki:

$$W_T = \left(\frac{1}{2}x \cdot \mu x\rho g + \frac{1}{2}(L-x) \cdot \mu(L-x)\rho g\right)\delta\varphi.$$

Warunek $W_F = W_T$ pozwala wyznaczyć wartość F:

$$F = \frac{1}{2}\mu x\rho g + \mu\rho g\frac{(L-x)^2}{2x}.$$

Otrzymaliśmy wartość F dla zadanej wartości x określającej położenie środka obrotu. Jeśli nie unieruchomimy wybranego punktu, to rzeczywisty ruch „wybierze" wartość $x = x_0$ odpowiadającą najmniejszej wartości F. Jak łatwo sprawdzić, siła F przyjmuje wartość minimalną F_{min} dla $x_0 = L/\sqrt{2}$ i wynosi wtedy:

$$F_{min} = \mu\rho gL(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}414 \cdot \mu mg.$$

Po wykonaniu obrotu o 180° belka zostaje przesunięta o $(\sqrt{2} - 1)L$.