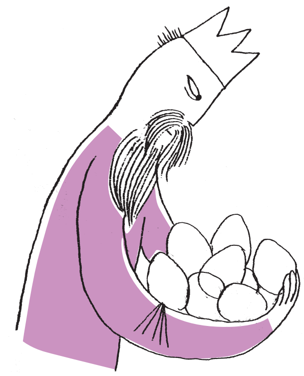
Liczby (nie)naturalne

*Jakub FILIPEK**

*Student MISMaP, Uniwersytet Warszawski



„Liczby naturalne stworzył Bóg, cała reszta to praca człowieka” – powiedział pod koniec XIX wieku Leopold Kronecker – matematyk o niemałym dorobku naukowym. Na to zdanie można patrzeć na wiele sposobów, jest to wszak jeden ze sloganów *intuicjonizmu* – a więc poglądu filozoficznego na matematykę, którego postulaty prowadzą do odrzucenia niekonstruktywnych dowodów, a czasem nawet zbiorów nieskończonych.

Ale dzisiaj zostańmy przy liczbach naturalnych. Przyjrzymy się temu, czego Kronecker nie mógł jeszcze wiedzieć o liczbach, a już konkretniej – o arytmetyce. Zbliżymy się do fragmentu współczesnej Gödlowskiej logiki, zobaczymy, że „liczby naturalne” nie muszą być tak naturalne, oraz dowiemy się, że zasady, którymi rządzą się te *prawdziwe* liczby, są przed nami ukryte.

Ile razy jedynkę?

Arytmetyka jest prosta. Zaczynamy od liczby 0, potem mówimy, że następną jest 1, a następnie *deklarujemy*, że osiągniemy *każdą* liczbę naturalną poprzez dodawanie jedynki. Chciałoby się powiedzieć – poprzez dodawanie jedynki odpowiednią *liczbę* razy. Ale tego wprost prawa arytmetyki nie mówią. Powyższa „deklaracja” (o dodawaniu jedynki) nosi dumne miano **zasady indukcji matematycznej**. Przyjrzyjmy się jej sformułowaniu. Przez $\varphi(n)$ będziemy rozumieć, że liczba n ma własność φ. Może to być dowolna własność arytmetyczna, na przykład $n \leqslant 5$ albo $n \cdot 2 + 3 = 7$. Przy takim oznaczeniu zasadę indukcji matematycznej zapisujemy następująco:

$$\big[\varphi(0) \wedge \big(\forall n\, \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)\big)\big] \Rightarrow \big(\forall n\, \varphi(n)\big).$$

Słownie: jeżeli 0 ma własność φ oraz jeżeli posiadanie własności φ przez n pociąga za sobą $\varphi(n+1)$, to już wszystkie liczby naturalne mają własność φ. Istotnie, nie mówimy tutaj, ile razy należy dodawać jedynkę. Można się domyślać, że nieskończenie wiele razy. Czy może zatem istnieć liczba, która jest nieskończoną sumą jedynek? Intuicja podpowiada, że każda liczba jest skończona. Zwykło się nawet mówić „nieskończoność nie jest liczbą”. Okazuje się, że sprawa jest nieco bardziej delikatna.

Arytmetyka – zbiór zasad

Chodzi o to, że próbujemy zapisać zasady, którymi rządzi się arytmetyka – *aksjomaty* – a później spojrzeć, jaka matematyczna struktura spełnia te zasady. Nie wskazujemy na konkretny model, który intuicyjnie znamy. Odróżniamy zatem struktury matematyczne, które realizują aksjomaty arytmetyki od szczególnej z nich – $\mathbb{N}$, której elementy będę nazywał *prawdziwymi* liczbami naturalnymi, w odróżnieniu od pozostałych struktur spełniających aksjomaty arytmetyki, te będę nazywał po prostu liczbami. Takie aksjomatyczne podejście jest w matematyce bardzo skuteczne i stosowane konsekwentnie od początku XX wieku – Kronecker (1823–1891) nie doczekał się nietypowych struktur arytmetycznych. Logika I rzędu, a więc taka, której system dowodowy jest skuteczny, ma swoje ograniczenia. Nie da się na przykład zapisać w niej aksjomatów, które zagwarantują, że w strukturze matematycznej będzie $\aleph_0$ elementów – czyli tyle, ile jest *prawdziwych* liczb naturalnych.

Matematycy przyjęli jednak pewien zestaw aksjomatów arytmetyki, nazwanych zbiorczo **arytmetyką Peano**, na cześć włoskiego matematyka Giuseppe Peano (1858–1932), który zaproponował ich pierwszą, historyczną już teraz, wersję. W obecnej wersji aksjomaty Peano mówią, że operacje dodawania i mnożenia są łączne i przemienne, zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania, a zero oraz jeden są elementami neutralnymi, odpowiednio, dodawania i mnożenia (czyli $n + 0 = n$ oraz $n \cdot 1 = n$). Ponadto wprowadzają porządek ($\leqslant$), który jest zgodny z operacjami dodawania i mnożenia oraz stanowią, że zero jest najmniejszym elementem, a jedynka jest najmniejszą liczbą większą niż zero.

Jeszcze jednym, ciekawym aksjomatem jest

$$\forall n, m \left[n \leqslant m \Rightarrow \exists k \ (n + k = m) \right].$$

Jeżeli liczba m jest większa od liczby n, to możemy przedstawić m jako $n + k$ dla pewnej liczby k. Dlaczego powiedziałem, że ten aksjomat jest ciekawy? Otóż do spółki z poprzednimi gwarantuje, że $n + 1$ jest najmniejszą liczbą większą niż n. Dopiero teraz nasza lista aksjomatów opisuje struktury, w których istnieje jednoznacznie wyznaczona *następna* liczba.

Nieskończone liczby

Okazuje się jednak, że powyższe aksjomaty uzupełnione o zasadę indukcji opisują znacznie większą klasę struktur niż tylko prawdziwe liczby naturalne $\mathbb{N}$. W szczególności istnieje taka struktura matematyczna, która zawiera element większy od każdej prawdziwej liczby naturalnej, jednocześnie spełniając teorię Peano, a więc będąc strukturą arytmetyczną. Zauważmy najpierw, że jeśli wprowadzimy nową stałą c, a do aksjomatów Peano dorzucimy zdanie

$$c \geqslant 0,$$

to otrzymamy teorię niesprzeczną, a więc taką, która ma model – jest możliwa do zrealizowania. W modelu stała c przyjmie konkretną wartość. Dla $c \geqslant 0$ możemy wybrać na przykład $c = 10$. Podobnie dla dowolnego zdania

$$c \geqslant m,$$

gdzie m jest równe $1, 2, 3, 4, \ldots$, możemy wybrać model, w którym c przyjmie wartość gwarantującą realizowanie naszej teorii.

Przedstawię teraz szkic dowodu *Twierdzenia o zwartości Logiki I rzędu.* Rozważmy teorię – a więc zbiór aksjomatów – składającą się z aksjomatów Peano oraz zdań powyższego typu dla wszystkich m naturalnych. Jest to oczywiście nieskończona teoria, ale to nie stanowi żadnego problemu. Załóżmy, że jest to teoria sprzeczna. Każda sprzeczna teoria dowodzi każdego zdania – na mocy zasady „z fałszu wynika wszystko". Weźmy zatem *dowód* fałszywego zdania – na przykład $0 \neq 0$. Tutaj zachowujemy czujność – przez dowód rozumiemy *skończone* rozumowanie, a więc korzystające ze skończonej liczby aksjomatów. Ale wcześniej zobaczyliśmy, że każdy skończony fragment naszej teorii jest niesprzeczny, bo można było wybrać odpowiednią wartość dla c. Fragment ten nie może więc dowodzić zdania $0 \neq 0$. W takim razie cała (nieskończona) teoria jest niesprzeczna, ponieważ, jak widać, nie istnieje dowód $0 \neq 0$ – to już wystarcza do niesprzeczności. Oznacza to, że istnieje model dla tej teorii, a więc pewna struktura arytmetyczna, w której stała c przyjmuje wartość większą od każdej prawdziwej liczby naturalnej.

Dla Czytelnika Wnikliwego: istnienie modelu dla teorii niesprzecznej wynika z twierdzenia o pełności.

Doszliśmy więc do zaskakującego wniosku, że istnieje struktura arytmetyczna, w której występują nieskończone liczby. Co więcej, okazuje się, że korzystając z arytmetyki, nie można stwierdzić, czy dana liczba jest skończona, czy nie. Gdyby się dało, to istniałaby formuła φ rozstrzygająca skończoność liczby. Dla takiej formuły $\varphi(x)$ jest prawdziwe, gdy x jest skończony, a fałszywe, gdy x jest nieskończony. Wówczas zachodzi

$$\varphi(0) \wedge \big(\forall n \, \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)\big),$$

ponieważ każda skończona liczba plus jeden wciąż jest skończona. Tylko że wtedy zasada indukcji prowadzi do

$$\forall n \, \varphi(n),$$

czyli nasza formuła nie rozstrzyga dobrze o skończoności liczb.

Oto krajobraz, który się przed nami rozciągnął: gdy opisaliśmy arytmetykę, której się nauczyliśmy, okazało się, że jej zasady mogą być spełnione przez struktury bogatsze od liczb naturalnych, a nasza arytmetyka nic sobie z tego nie robi – nie zauważa nawet różnicy między *prawdziwymi* liczbami a nieskończonymi elementami. Liczby naturalne wyglądają jak tylko szczególny przypadek ogólnej struktury arytmetycznej...

Niedostępna teoria

Spróbujmy się im jednak bliżej przyjrzeć. Rozważmy listę wszystkich możliwych zdań, które są realizowane w strukturze prawdziwych liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Na tej liście pojawią się wszystkie oczywistości pokroju $0 = 0$, jak i wszystkie najbardziej wysublimowane twierdzenia arytmetyczne. Wśród nich będą z całą pewnością nieudowodnione i niesformułowane dotychczas twierdzenia teorii liczb. Jest dość jasne, że nie da się wypisać wszystkich tych zdań – choćby dlatego, że jest ich nieskończenie wiele. Ale możemy zadać sobie pytanie, czy istnieje jakikolwiek przepis, który powie nam, czy dane zdanie jest prawdziwe, czy nie. Taki przepis moglibyśmy zaimplementować jako program komputerowy i dostawać (być może po bardzo długim czasie) odpowiedzi – tak lub nie.

Co ciekawe, od prawie stu lat wiemy, że taki algorytm nigdy nie powstanie. Jest to konsekwencja I twierdzenia Gödla o niezupełności. Mówi ono mniej więcej tyle, że każda teoria zupełna, która potrafi odtworzyć arytmetykę, jest nieobliczalna. Zupełna teoria to taka, która jest zbiorem *wszystkich* zdań prawdziwych w pewnej strukturze, a nieobliczalność oznacza, że nie istnieje taki algorytm, którego działanie opisaliśmy powyżej. Umiejętność odtworzenia arytmetyki jest trochę bardziej subtelną własnością, ale być może zadowoli nas stwierdzenie, że praktycznie każda niebanalna teoria, z którą obcuje się w matematyce, tę zdolność posiada.

Nasza sytuacja wygląda następująco: mamy ograniczony dostęp do zasad, którymi rządzą się prawdziwe liczby naturalne. Posługujemy się zatem obliczalnymi teoriami, takimi jak arytmetyka Peano, godząc się z konieczności na większą ogólność. A co to mówi o Matematyce? W opinii autora jeden wniosek jest jasny. Matematyka nie jest taka prosta, na jaką może wyglądać, nawet na poziomie tak podstawowym jak arytmetyka. Ale nie powinno nas to zaskakiwać. Zaskakiwać może jednak to, że nie wszystko, nawet o liczbach naturalnych, można udowodnić. A więc Matematyka nie jest czarno-biała. Ma swoje szarości...

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1798. W pola tabeli 9×9 wpisano liczby całkowite od 1 do 81 (w każdym polu znajduje się jedna liczba, wszystkie liczby są różne). Okazało się, że dowolne dwie liczby różniące się o 3 znajdują się w sąsiednich polach. Udowodnić, że różnica liczb wpisanych w pewne dwa narożne pola jest podzielna przez 6.

M 1799. Pięć krawędzi pewnego czworościanu jest stycznych do sfery. Udowodnić, że istnieje inny zbiór pięciu krawędzi tego czworościanu, z których każda jest styczna do pewnej sfery (niekoniecznie tej samej co wcześniej).

M 1800. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$(n!)! \leqslant (n-1)!^{n!} \cdot n!^{(n-1)!}.$$

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1107. Z brzegu balkonu, na wysokości H nad ziemią, Jacek upuszcza pionowo ołowiane kulki, każda o masie m. Stara się jak najdokładniej trafić w wyznaczony punkt. Dysponuje najprecyzyjniejszą dostępną aparaturą. Na podstawie zasady nieoznaczoności Heisenberga oszacuj typową odległość od celu, w jakiej będą lądowały kulki Jacka?

F 1108. Belka o masie m i długości L spoczywa na poziomym, płaskim podłożu. Współczynnik tarcia między powierzchnią belki i podłożem wynosi μ. Belka jest jednorodna, tzn. masa przypadająca na jednostkę jej długości jest stała i wynosi ρ. Jaka jest najmniejsza wartość F_{min} poziomej, punktowej (tzn. przyłożonej w jednym punkcie belki) siły potrzebnej do przesunięcia belki? Przyspieszenie ziemskie wynosi g. Pomijamy różnicę wartości współczynników tarcia statycznego i kinetycznego.

Rozwiązania na str. 24