# Skojarzenia – część 1

*Bartłomiej BZDĘGA* Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zachęcam Czytelnika, który jeszcze tego nie zrobił, do zapoznania się z poprzednim kącikiem – są tam wprowadzone podstawowe definicje i oznaczenia, których będę tu używał. Ponadto, jeśli wierzchołki $v$ i $w$ danego grafu są połączone krawędzią, będziemy pisać $v \sim w$. Graf nazwiemy *d-regularnym*, jeśli wszystkie jego wierzchołki mają stopień $d$.

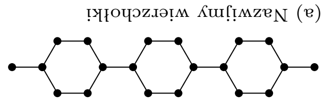
*Skojarzeniem* nazywamy każdy 1-regularny podgraf danego grafu. Mówiąc prościej – skojarzenie tworzy kilka par wierzchołków, przy czym każda para jest połączona krawędzią. Jeśli do skojarzenia należą wszystkie wierzchołki danego grafu, to nazywamy je *pełnym* albo *doskonałym*.

Pokolorujmy każdą krawędź grafu na jakiś kolor, przy czym krawędzie mające wspólny wierzchołek muszą mieć inne kolory. Takie kolorowanie nazywamy *właściwym*. Krawędzie każdego z kolorów tworzą skojarzenie. Jeśli każdemu kolorowi odpowiada skojarzenie pełne, to mówimy, że te skojarzenia tworzą *faktoryzację grafu*.

## Zadania

1. W każdym z wielościanów foremnych znajdź skojarzenie pełne albo wykaż, że takiego nie ma.
2. Klasa licząca $n$ osób otrzymała zestaw $n$ zadań domowych. Chcemy zorganizować lekcję w taki sposób, by każdy uczeń pokazał przy tablicy rozwiązanie jednego zadania, które zrobił w domu, ale każdy uczeń ma zaprezentować rozwiązanie innego zadania. Rozstrzygnąć, czy zawsze jest to możliwe, jeśli:
   (a) każdy uczeń rozwiązał dokładnie dwa zadania, a każde zadanie zostało rozwiązane przez dokładnie dwóch uczniów;
   (b) każdy uczeń rozwiązał co najmniej dwa zadania, a każde zadanie zostało rozwiązane przez co najmniej dwóch uczniów.
3. Wykazać, że graf bez cykli ma co najwyżej jedno skojarzenie pełne.
4. Udowodnić, że dla każdego $c$ istnieje graf, który ma dokładnie jedno skojarzenie pełne oraz co najmniej $c$ cykli.
5. Niech $n$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że następujące grafy mają faktoryzację:
   (a) $K_{2n}$ – każdy z $2n$ wierzchołków jest połączony z każdym innym (graf *pełny*);
   (b) $K_{n,n}$ – taki, w którym można zapisać $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ oraz $E = \big\{a_i b_j : i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\big\}$ (graf *dwudzielny pełny*).
6. Niech $n$ będzie całkowite dodatnie. Dany jest $(2n)$-elementowy zbiór liczb rzeczywistych o nieujemnej sumie elementów. Udowodnić, że ma on co najmniej $2n-1$ dwuelementowych podzbiorów o nieujemnej sumie elementów.
7. W klasie maturalnej jest $n$ chłopców i $n$ dziewcząt, niektórzy się przyjaźnią i wszystkie przyjaźnie są odwzajemnione. Wiadomo, że każdy ma co najmniej $n/2$ przyjaciół płci przeciwnej. Dowieść, że ta klasa może zatańczyć na studniówce poloneza w taki sposób, żeby w każdej z $n$ par tańczyli zaprzyjaźnieni dziewczyna i chłopak.
8. Do grupy przedszkolnej uczęszcza $2n$ dzieci. Każde dziecko ma w tej grupie co najmniej $n$ przyjaciół, przy czym relacja bycia przyjacielem jest symetryczna. Udowodnić, że grupa ta może pójść na wycieczkę parami tak, żeby każdy szedł w parze ze swoim przyjacielem.

**Wskazówki do zadań**

1. Każdy ma.
2. (a) Ten graf składa się z parami rozłącznych cykli parzystej długości.
(b) Wbrew pozorom to nie jest zawsze możliwe.
3. Niech $G = (V, E)$ będzie danym grafem. Przeprowadzimy indukcję ze względu na $|E|$. Jeśli $|E| = 0$, to teza zachodzi. W przeciwnym razie graf ma wierzchołek $v$ stopnia 1 (np. koniec najdłuższej ścieżki); niech $w$ będzie jedynym sąsiadem wierzchołka $v$. Krawędź $vw$ musi należeć do skojarzenia. W grafie $G'$, powstałym przez usunięcie z grafu $G$ wierzchołków $v$ i $w$ oraz wszystkich krawędzi, które z nich wychodzą, istnieje co najwyżej jedno skojarzenie pełne na mocy założenia indukcyjnego.
4. 
5. (a) Nazwijmy wierzchołki $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$. Dla $j = 1, 2, \ldots, 2n-1$ w $j$-tym skojarzeniu znajdą się krawędzie $v_j \sim v_{2n}$ oraz $v_{j-i} \sim v_{j+i}$ przy $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (przyjmujemy, że $v_t = v_{t'}$ dla $t' \equiv t \pmod{2n-1}$).
(b) Dla $j = 1, 2, \ldots, n$ w $j$-tym skojarzeniu znajdą się krawędzie $a_i \sim b_{i+j}$ przy $i = 1, 2, \ldots, n$ (przyjmujemy, że $b_t = b_{t'}$ dla $t' \equiv t \pmod{n}$).
6. Niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$ będzie danym zbiorem. Rozważmy faktoryzację grafu pełnego o wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$. Z każdego skojarzenia wybieramy krawędź $v_i v_j$, dla której suma $a_i + a_j$ jest największa.
7. Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą dziewczętami, a $b_1, \ldots, b_n$ – chłopcami. Zacznijmy od dowolnej zaprzyjaźnionej pary. Powiedzmy, że mamy już pary, bez straty ogólności, $a_1 \sim b_1, \ldots, a_m \sim b_m$ i $1 \leqslant m < n$. Jeśli którakolwiek z pozostałych dziewcząt przyjaźni się z którymkolwiek z pozostałych chłopców, to mamy kolejną parę. W przeciwnym razie dowolna dziewczyna $a \neq a_1, \ldots, a_m$ i dowolny chłopiec $b \neq b_1, \ldots, b_m$ dla pewnego $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ spełniają relacje $a \sim b_j$ i $b \sim a_j$.
8. Wystarczy lekko zmodyfikować rozumowanie z poprzedniego zadania.

*Uwaga.* Można wykazać mocniejszą własność – taki graf musi mieć cykl przechodzący przez wszystkie wierzchołki. Jest to treść *twierdzenia Diraca*.