Kącik Początkującego Olimpijczyka 68

Przeliczenia w grafach

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Grafem (prostym) nazywamy parę uporządkowaną (V, E), w której V jest dowolnym niepustym zbiorem skończonym, natomiast E jest zbiorem wybranych dwuelementowych podzbiorów zbioru V. Bardziej po ludzku – mamy pewien zbiór V, którego elementy nazywamy *wierzchołkami*; elementy zbioru E, zwane *krawędziami*, interpretujemy jako połączenia wybranych par wierzchołków. Wierzchołki v i w, które są połączone krawędzią, nazywamy *sąsiednimi*. Często zamiast krawędź $\{v, w\}$ piszemy po prostu vw. Liczbę sąsiadów wierzchołka v nazywamy jego *stopniem* i oznaczamy $\deg(v)$.

Ścieżką długości m nazywamy graf, którego wierzchołki można ustawić w taki ciąg $(w_0, w_1, \ldots, w_m)$, że $E = \{w_0w_1, w_1w_2, \ldots, w_{m-1}w_m\}$. *Cyklem długości $m \geqslant 3$* – graf, którego wierzchołki można ułożyć w ciąg $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$, dla którego $E = \{w_1w_2, w_2w_3, \ldots, w_{m-1}w_m, w_mw_1\}$. Graf nazywamy *pełnym* lub *kliką*, jeśli każde dwa jego wierzchołki są połączone.

Graf $G' = (V', E')$ nazywamy podgrafem grafu $G = (V, E)$, jeśli $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$. Mówiąc, dla przykładu, *graf G ma cykl długości* 5, mamy na myśli to, że pewien podgraf grafu G jest cyklem długości 5. Podobnie przez *liczbę ścieżek długości* 3 *w grafie G* rozumiemy liczbę tych podgrafów grafu G, które są ścieżkami długości 3.

Dalej, o ile nie napisano inaczej, przyjmujemy $n = |V|$ oraz $k = |E|$ dla danego grafu. Niech l oznacza liczbę ścieżek długości 2 w danym grafie, a t – liczbę *trójkątów* (cykli długości 3). Stosujemy też konwencję $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ oraz $d_i = \deg(v_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Twierdzenie 1 (o uściskach dłoni). *Zachodzi równość* $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2k$.

Dowód. „Przetnijmy” każdą krawędź na dwie *półkrawędzie*. Liczba wszystkich półkrawędzi jest oczywiście równa $2k$. Z drugiej strony, każdy wierzchołek v_i jest jedynym końcem d_i półkrawędzi, więc liczba półkrawędzi jest równa $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. □

Niech $\mathrm{com}(v_i, v_j) = c_{i,j}$ oznacza liczbę wspólnych sąsiadów wierzchołków v_i i v_j.

Twierdzenie 2. *Zachodzą równości:* $l = \binom{d_1}{2} + \binom{d_2}{2} + \ldots + \binom{d_n}{2} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} c_{i,j}$.

Dowód. Pierwsza równość wynika z tego, że liczbą ścieżek ze środkowym wierzchołkiem v_i jest $\binom{d_i}{2}$. Druga – z tego, że liczbą ścieżek z końcami v_i i v_j jest $c_{i,j}$. □

Wiele zadań na Olimpiadzie Matematycznej można wysłowić w języku grafów, zwłaszcza te o połączeniach drogowych miast, przyjaźniach w pewnej grupie osób itp. Początkującemu w tej materii Czytelnikowi polecam, jako cenne ćwiczenie, dokonać przeglądu zadań OM/OMJ, znaleźć te o grafowej naturze i je „przetłumaczyć”.

Zadania

1. Wykazać, że jeśli w grafie nie ma trójkątów, to $k \leqslant \frac{1}{4}n^2$. (twierdzenie Mantela)
2. Dany jest graf o n wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma stopień d, każde dwa połączone wierzchołki mają dokładnie λ wspólnych sąsiadów oraz każde dwa niepołączone wierzchołki mają dokładnie μ wspólnych sąsiadów (graf taki nazywamy *silnie regularnym*). Wykazać, że $(n - d - 1)\mu = (d - \lambda - 1)d$.
3. Każda krawędź danego grafu pełnego jest czerwona, zielona lub niebieska. Udowodnić, że w tym grafie jest mniej niż $\frac{1}{9}n^3$ trójkolorowych trójkątów.
4. Każda krawędź danego grafu pełnego jest czerwona lub niebieska. Udowodnić, że liczba jednokolorowych trójkątów w tym grafie jest równa co najmniej $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$. (twierdzenie Goodmana)
5. Dowieść, że $9t^2 \leqslant 2k^3$. (LVI OM)
6. Niech $G = (V, E)$, przy czym $V = A \cup B$ dla $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ oraz $A \cap B = \emptyset$. Wiadomo, że w grafie G każda krawędź jest postaci a_ib_j i nie ma żadnego cyklu długości 4. Dowieść, że ten graf ma co najwyżej $\frac{1}{2}n(\sqrt{4n-3}+1)$ krawędzi.

Wskazówki do zadań

1. Niech v będzie wierzchołkiem z najwyższym stopniem, który oznaczymy przez Δ. Podzielmy wierzchołki na dwa zbiory: A – wszyscy sąsiedzi v oraz B – wierzchołki niewystępujące w A (dla jasności, $v \in B$). Wierzchołki w zbiorze A nie mogą sąsiadować, więc każdy z nich ma stopień co najwyżej $|B| = n - \Delta$. Każdy wierzchołek ze zbioru B ma stopień co najwyżej Δ. Suma stopni wierzchołków nie przekracza zatem $2\Delta(n-\Delta) \leqslant \frac{1}{2}n^2$ i wystarczy teraz skorzystać z twierdzenia 1.
2. Obliczyć na dwa sposoby liczbę ścieżek długości 2 i porównać otrzymane wyniki.
3. Liczba trójkolorowych trójkątów nie przekracza jednej trzeciej liczby dwukolorowych ścieżek długości 2 (dlaczego?). Liczba tych ścieżek jest równa $\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i + b_ic_i + c_ia_i)$, przy czym a_i, b_i, c_i oznaczają, odpowiednio, stopień wierzchołka v_i w podgrafie czerwonym, zielonym, niebieskim. Pozostaje wykazać, że każdy ze składników jest mniejszy od $\frac{1}{3}n^2$, w czym może przydać się KPO z Δ^3_{23}.

Ciekawostka. Niedawno udowodniono, że optymalną stałą jest $\frac{1}{15}$. Wykorzystano nowe i potężne narzędzie – algebry flagowe. (*Rainbow triangles in three-colored graphs*, Journal of Combinatorial Theory, B, Vol. 126, 2017, 83–113)

4. Lepiej oszacować liczbę dwukolorowych trójkątów i odjąć ją od liczby wszystkich trójkątów, czyli $\binom{n}{3}$. Liczba dwukolorowych trójkątów jest równa połowie liczby dwukolorowych ścieżek.
5. Niech t_i będzie liczbą trójkątów, których jednym z wierzchołków jest v_i. Wówczas $t_i \leqslant \binom{d_i}{2} \leqslant \frac{1}{2}d_i^2$, ale również $t_i \leqslant k - d_i \leqslant k$. Stąd $t_i \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}d_i^2 k} = d_i\sqrt{k/2}$.
6. Niech $d_i = \deg(a_i)$ oraz $c_{i,j} = \mathrm{com}(b_i, b_j)$. Brak cyklu długości 4 jest równoważny temu, że $c_{i,j} \leqslant 1$ dla wszystkich i, j. Liczba ścieżek długości 2 o środku w zbiorze A jest taka sama, jak liczba ścieżek długości 2 o końcach w zbiorze B. Obserwacje te prowadzą nas do nierówności $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \sum_{i=1}^{n} d_i \leqslant n^2 - n$. Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową oraz twierdzenia 1 otrzymujemy $\frac{k^2}{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_i^2$.

Ciekawostka. Dokładne wyznaczanie największej możliwej liczby krawędzi w takim grafie jest bezpośrednio związane z konstruowalnością skończonych płaszczyzn rzutowych – bardzo ważnym i trudnym zagadnieniem z pogranicza geometrii, kombinatoryki, teorii liczb i algebry.