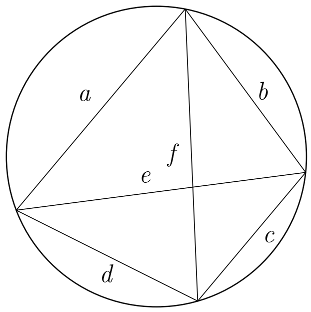
Elegancki dowód twierdzenia Ptolemeusza

*Krzysztof R. APT**

* CWI, Amsterdam i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Twierdzenie Ptolemeusza, udowodnione przez Klaudiusza Ptolemeusza (100 – około 168), ma następującą postać:

W czworokącie wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków (patrz rysunek na marginesie).



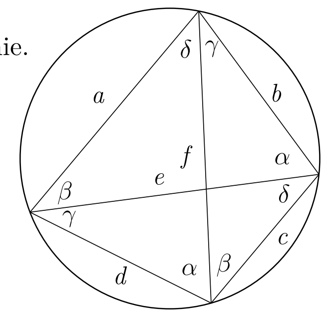
Twierdzenie Ptolemeusza: $ac + bd = ef$.

Twierdzenie to ma wiele znanych dowodów, niektóre z nich można znaleźć w Wikipedii. Celem tej notki jest zaprezentowanie pięknego dowodu, autorstwa W. Derricka i J. Hersteina, który został przedstawiony jako „dowód bez słów", zawierający jedynie dwa z poniższych rysunków: pierwszy i trzeci. Aby wyjaśnić szczegóły, dodaliśmy jeszcze jeden rysunek.

W. Derrick and J. Herstein, *Proof without words: Ptolemy's theorem*, The College Mathematics Journal, 43(5), p. 386, November 2012.
Dowód ten został spopularyzowany przez stronę A. Bogomolny, `https://www.cut-the-knot.org/`.

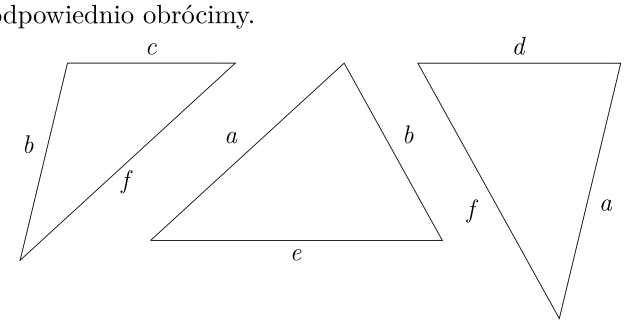
W dowodzie wykorzystujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Kąty wpisane w okrąg oparte na tej samej cięciwie są równe.*

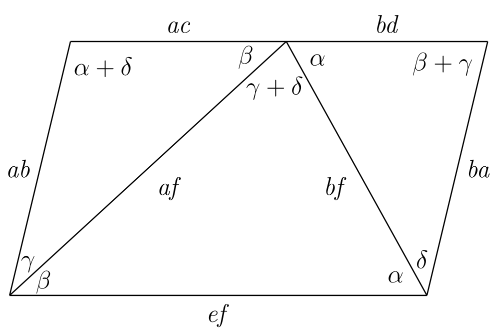


Oznaczmy kąty jak na rysunku obok. Podwójne wystąpienia α, β, γ i δ są uzasadnione przez powyższe twierdzenie. Na przykład oba kąty wpisane oznaczone przez α są oparte na boku długości a.

Aby udowodnić twierdzenie Ptolemeusza, wybierzemy teraz z oryginalnego rysunku trzy trójkąty, które odpowiednio obrócimy.



Następnie przeskalujemy je odpowiednio przez a, f i b, aby mogły być ułożone obok siebie i utworzyć poniższy rysunek, w którym ponownie wykorzystujemy oryginalne oznaczenia kątów.

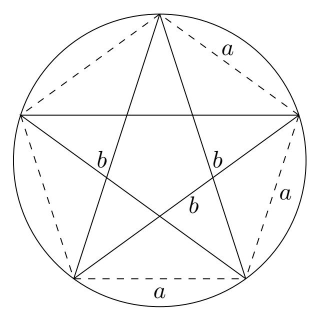


Zauważmy, że ac i bd leżą na tej samej linii, ponieważ $\beta + \gamma + \delta + \alpha = 180°$, co wynika z tego, że suma kątów oryginalnego czworokąta to $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360°$. Zatem powyższy rysunek przedstawia czworokąt.

Oznaczenia kątów również ujawniają, że pary przeciwległych kątów czworokąta są równe: oba są równe $\alpha + \delta$ lub $\beta + \gamma$. Zatem ten czworokąt jest równoległobokiem. Jego przeciwległe boki są równej długości, zatem $ac + bd = ef$.

Ciekawą, prostą konsekwencją tego twierdzenia jest następująca obserwacja.

Twierdzenie. *W pięciokącie foremnym z bokami o długości a i przekątnymi o długości b, zachodzi $\frac{b}{a} = \phi$, gdzie $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest tzw. złotą liczbą.*



Aby udowodnić to twierdzenie, przypomnijmy, że złota liczba ϕ spełnia równanie $1 + \phi = \phi^2$, i rozważmy czworokąt z bokami a, a, a, i b (z przekątnymi b i b). Z twierdzenia Ptolemeusza $a^2 + ab = b^2$. Dzieląc obie strony przez a^2, otrzymujemy równanie:

$$1 + \frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

To oznacza, że $\frac{b}{a}$ spełnia to samo równanie co złota liczba. Ponieważ to równanie kwadratowe ma tylko jedno dodatnie rozwiązanie, zachodzi $\frac{b}{a} = \phi$.

Tekst oparty na załączniku 7 z książki: Krzysztof R. Apt, "A Brief History of Mathematics for Curious Minds", *World Scientific, 2024. Rysunki zostały stworzone przez Magdalenę Kycler i Piotra Sitka.*