Euler spotyka Ramanujana

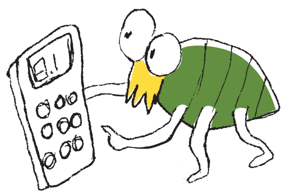
Jarosław GÓRNICKI

Big Bang. Leonhard Euler (1707–1783) zabłysnął w 1735 roku wzorem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Jego pierwsze uzasadnienie było błędne [2], ale intuicja magiczna. Dowód, jaki podał w *Introductio...* (1748), nie budził już żadnych wątpliwości. Tożsamość Eulera wykażemy elementarnie.

Bogini Namagiri. Srinivasa Ramanujan (1887–1920) był genialnym samoukiem. Pozostawił około 3900 wzorów matematycznych. Wielu z nich nikt dotąd nie potrafi udowodnić. Dla Ramanujana były one tak oczywiste, że nie widział potrzeby ich uzasadniania (zob. Δ^3_{18}). Mawiał, że to bogini Namagiri z Namakkal zawdzięcza swe uzdolnienia matematyczne.



Dowód wzoru Eulera (styl Ramanujana)

$$1=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}\overset{\text{(a)}}{=}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{4}}\right]=$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{8}}\right]=\ldots=\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}\overset{\text{(b)}}{=}$$

$$\overset{\text{(b)}}{=}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{2}{4^n}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{(c)}}\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

więc wzór Eulera wynika z równości:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n\ \text{nieparzyste}}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\ \text{parzyste}}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\qquad\square$$

Dla „mięczaków". Kto przeglądał rękopisy Ramanujana (dostępne w Internecie), wie, że to mieszanka niezwykle oryginalnych, zaskakujących pomysłów i ukrytej głębokiej wiedzy. Oto kilka podpowiedzi ułatwiających zrozumienie podanego dowodu.

(a) Korzystając z jedynki trygonometrycznej, wzorów $\sin 2x=2\sin x\cos x$ oraz $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $x\in\mathbb{R}$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x+\pi}{2}}\right].$$

(b) Gdy k zmienia się od 0 do 2^n-1, to wartości $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ rozmieszczone są na wykresie funkcji $\sin x$, $x\in(0,\pi)$, symetrycznie względem prostej $x=\frac{\pi}{2}$. Rozważymy argumenty należące do przedziału $(0,\frac{\pi}{2})$, tj. wartości $\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, gdy k zmienia się od 0 do $2^{n-1}-1$. Stąd mnożenie odpowiedniej sumy przez 2.

(c) Gdy $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, to $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ i $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1$, więc $\frac{1}{\sin^2 x}>\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\sin^2 x}-1$. Przyjmując kolejno $x=\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, $k=0,1,\ldots,2^{n-1}-1$, dostajemy:

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{2}{4^n}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}>\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{2}{4^n}\cdot\frac{1}{\left[\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right]^2}$$
$$>\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{2}{4^n}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}-\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{2}{4^n},$$

czyli $1>\frac{8}{\pi^2}\cdot\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{(2k+1)^2}>1-\frac{1}{2^n}$.

Pouczające jest poznanie (porównanie) innych dowodów wzoru Eulera podanych np. w [1].

Literatura

[1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Dowody z Księgi*, WN PWN, Warszawa 2002.

[2] J. Górnicki, *Od bzdury do bingo!*, Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie 49 (2012), 21–25.