Proste i punkty w świecie abstrakcji

Bartłomiej BZDĘGA
Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Opublikowany w tym numerze Kącik Początkującego Olimpijczyka nr 66 poświęcony jest zastosowaniu przekształceń afinicznych w rozwiązywaniu zadań olimpijskich. W niniejszym artykule przedstawiam nieco bardziej abstrakcyjne spojrzenie na tę tematykę.

Uogólniona płaszczyzna

Trójkę

$$\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \sim),$$

w której $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ są zbiorami, a $\sim$ jest relacją pomiędzy ich elementami (czyli dla każdego $P \in \mathcal{P}$ i $\ell \in \mathcal{L}$ zdanie $P \sim \ell$ jest prawdziwe lub fałszywe), nazywamy *uogólnioną płaszczyzną*. Jest to faktycznie obiekt niezmiernie ogólny, gdyż elementy zbiorów $\mathcal{P}$ i $\mathcal{L}$ mogą być czymkolwiek. Dla przykładu, $\mathcal{P}$ może być zbiorem potraw, $\mathcal{L}$ – zbiorem ludzi, a relacja $P \sim \ell$ oznacza, że ℓ lubi P. I to naprawdę jest pełnoprawna uogólniona płaszczyzna!

Chcąc jednak pozostać nieco bliżej planimetrii, umownie będziemy nazywać:

$\mathcal{P}$ – zbiorem *punktów*,
$\mathcal{L}$ – zbiorem *prostych*,
$\sim$ – relacją *incydencji*.

Zamiast *punkt P jest incydentny z prostą ℓ* możemy powiedzieć: *punkt P leży na prostej ℓ* lub *prosta ℓ przechodzi przez punkt P*. Ważna uwaga – na płaszczyźnie euklidesowej proste w pewnym sensie są zbiorami punktów i relacja $\sim$ jest po prostu relacją $\in$. W ogólności wcale nie musi tak być.

Punkty $P_1, P_2, \ldots$ nazywamy *współliniowymi*, gdy istnieje prosta ℓ, która przechodzi przez każdy z nich. Jeśli przez pewien punkt P przechodzi każda z prostych $\ell_1, \ell_2, \ldots$, to nazywamy te proste *współpękowymi*. Proste ℓ_1 i ℓ_2, które nie są współpękowe, nazywamy *równoległymi*. Piszemy wówczas $\ell_1 \parallel \ell_2$. Dodatkowo zakładamy, że każda prosta jest równoległa do samej siebie.

Płaszczyzna afiniczna

Aby nieco ograniczyć liczbę obiektów, z którymi będziemy pracować, wprowadzamy pojęcie *płaszczyzny afinicznej*, która – oprócz tego, że jest uogólnioną płaszczyzną – spełnia dodatkowo trzy aksjomaty. Każdy z nich opiszę krótko, podając, w jakim celu jest wprowadzony i jakie daje korzyści.

Aksjomat (A1). *Przez każde dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.*

Możemy zatem bez wyrzutów sumienia mówić *prosta AB*, bo taka prosta istnieje i jest dokładnie jedna. Bezpośrednią konsekwencją tego aksjomatu jest to, że każde dwie proste albo są równoległe, albo istnieje dokładnie jeden punkt incydentny z nimi dwiema. W tym drugim przypadku będziemy mówić, że proste *się przecinają*, a wspomniany punkt nazwiemy ich *punktem przecięcia*. Jeśli trójka punktów (A, B, C) nie jest współliniowa, to będziemy ją nazywać *trójkątem ABC*. Jeżeli czwórka punktów (A, B, C, D) spełnia warunki: $AB \parallel CD$ i $BC \parallel DA$ oraz te cztery proste są różne, to mówimy o *równoległoboku $ABCD$*.

Aksjomat (A2). *Dla każdego punktu P i prostej ℓ istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt P i równoległa do prostej ℓ.*

Dzięki temu aksjomatowi relacja równoległości jest przechodnia: jeżeli $\ell_1 \parallel \ell_2$ i $\ell_2 \parallel \ell_3$, to $\ell_1 \parallel \ell_3$ – w przeciwnym razie istniałby punkt, przez który przechodzą dwie proste (ℓ_1 i ℓ_3) równoległe do ℓ_2. Możemy zatem podzielić zbiór $\mathcal{L}$ na takie rozłączne parami podzbiory $\mathcal{K}_i$ indeksowane elementami i z pewnego zbioru I, że zachodzi równoważność $\ell_1 \parallel \ell_2 \Leftrightarrow \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{K}_i$ dla pewnego $i \in I$. Podzbiory te, czyli klasy równoległości prostych, nazywamy *kierunkami*.

Drugim ważnym wnioskiem jest to, że każdy trójkąt ABC można uzupełnić do równoległoboku $ABCD$. Konstrukcja jest następująca. Niech ℓ_1 będzie prostą równoległą do AB, przechodzącą przez C oraz niech ℓ_2 będzie prostą równoległą do BC, przechodzącą przez A. Mamy $\ell_1 \parallel AB \nparallel BC \parallel \ell_2$. Oznacza to, że proste ℓ_1 i ℓ_2 należą do różnych kierunków, więc się przecinają. Jeśli D jest ich punktem przecięcia, to $ABCD$ jest równoległobokiem.

Aksjomat (A3). *Istnieje trójkąt.*

Ten aksjomat zapobiega sytuacji zupełnie nieciekawej, w której wszystkie punkty leżą na jednej prostej. Można powiedzieć więcej: dla każdej prostej istnieją co najmniej dwa punkty, przez które ta prosta nie przechodzi – pierwszy wprost z aksjomatu, drugi z konstrukcji równoległoboku. Niech ABC będzie trójkątem, który uzupełniamy do równoległoboku $ABCD$. Dla dowolnej prostej ℓ mamy $\ell \nparallel AB$ lub $\ell \nparallel BC$. W pierwszym przypadku prostą ℓ przecinają proste AB i CD, które są różne i równoległe – stąd na prostej ℓ leżą co najmniej dwa punkty. W drugim przypadku jest analogicznie. Zatem każda prosta przechodzi przez co najmniej dwa punkty. Teraz już możemy utożsamić prostą ze zbiorem punktów, przez które przechodzi! Zamiast $P \sim \ell$ możemy teraz pisać $P \in \ell$.

Kolineacje płaszczyzny afinicznej

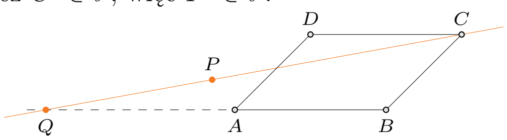
Przekształcenie $L : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ nazywamy *kolineacją płaszczyzny* Π, jeśli jest bijekcją oraz spełnia następujący warunek: dla każdej trójki współliniowych punktów A, B, C punkty $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$ również są współliniowe.

Twierdzenie. *Niech L będzie kolineacją płaszczyzny afinicznej. Wówczas dla każdej prostej $\ell \in \mathcal{L}$ zbiór $L(\ell)$ też jest prostą.*

Mówiąc prościej, obrazami prostych są proste.

Dowód. Niech punkty A i B leżą na prostej ℓ. Przez punkty primowane zawsze oznaczać będziemy obrazy punktów nieprimowanych. Oznaczmy $\ell' = A'B'$.

Z definicji kolineacji wynika, że dla każdego $X \in \ell$ zachodzi $X' \in \ell'$, więc $L(\ell) \subseteq \ell'$. Trzeba jeszcze wykazać przeciwne zawieranie. Przypuśćmy, że tak nie jest i niech punkt $C \notin \ell$, ale $C' \in \ell'$. Ponieważ $A', B', C' \in \ell'$, obrazy prostych AB, BC i CA są zawarte w ℓ'. Uzupełnijmy trójkąt ABC do równoległoboku $ABCD$. Niech P będzie dowolnym punktem różnym od A, B, C, D. Wówczas $CP \nparallel AB$ lub $AP \nparallel BC$. W pierwszym przypadku proste CP i AB przecinają się w pewnym punkcie Q. Ponieważ Q leży na AB, mamy $Q' \in \ell'$. Również $C' \in \ell'$, więc $P' \in \ell'$.



Drugi przypadek jest analogiczny. Wnioskujemy stąd, że $L(\mathcal{P} \setminus \{D\}) \subseteq \ell'$. Funkcja $F : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ jest bijekcją, więc co najwyżej jeden punkt (D') nie leży na prostej ℓ'. Jest to poszukiwana sprzeczność, bo powinny być co najmniej dwa takie punkty. $\square$

Jednym z najważniejszych wniosków jest to, że przekształcenie odwrotne do kolineacji płaszczyzny afinicznej również jest kolineacją płaszczyzny afinicznej. Kolejne, nietrudne wnioski pozostawiam Czytelnikowi: obrazami/przeciwobrazami trójkątów są trójkąty, par prostych równoległych – pary prostych równoległych, par prostych przecinających się – pary prostych przecinających się, a równoległoboków – równoległoboki.

Płaszczyzna afiniczna $\mathbb{R}^2$

Od teraz będziemy prowadzić rozważania dla *płaszczyzny euklidesowej* $\mathbb{R}^2$, która, jak łatwo sprawdzić, z punktami $P = (x, y)$ oraz prostymi $\ell = \{(x, y) : ax + by + c = 0\}$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$ spełnia definicję płaszczyzny uogólnionej z relacją $\in$ oraz aksjomaty płaszczyzny afinicznej. Celem jest następujące

Twierdzenie. Kolineacje płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ są tym samym, co *przekształcenia afiniczne*, czyli odwzorowania bijektywne $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, spełniające następujące warunki:

(1) obrazami prostych są proste;
(2) jeśli $\overrightarrow{SX} = x\overrightarrow{SA}$ dla pewnej liczby rzeczywistej x, to $\overrightarrow{F(S)F(X)} = x\overrightarrow{F(S)F(A)}$.

Dowód. Każde przekształcenie afiniczne jest kolineacją – wynika to z warunku (1). Załóżmy zatem, że przekształcenie L jest kolineacją $\mathbb{R}^2$. Warunek (1) już udowodniliśmy, dowód warunku (2) podzielimy na kilka kroków. Tak jak poprzednio, niech punkty primowane będą obrazami punktów nieprimowanych.

Krok 1. Jeśli $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$, to $\overrightarrow{A_1'B_1'} = \overrightarrow{A_2'B_2'}$.
Jeżeli proste A_1B_1 i A_2B_2 są różne, to $A_1B_1B_2A_2$ jest równoległobokiem, więc jego obraz $A_1'B_1'B_2'A_2'$ też jest równoległobokiem. W przeciwnym razie rozważamy dodatkowy wektor $\overrightarrow{A_3B_3}$, który leży poza prostą A_1B_1. Korzystając dwukrotnie z pierwszego przypadku, mamy $\overrightarrow{A_1'B_1'} = \overrightarrow{A_3'B_3'} = \overrightarrow{A_2'B_2'}$.

Niech V będzie zbiorem wektorów swobodnych, dwuwymiarowych, o współrzędnych rzeczywistych. Korzystając z powyższego, możemy zdefiniować przekształcenie $T : V \to V$ indukowane przez kolineację L w następujący sposób: $T(\vec{v}) = \overrightarrow{A'B'}$, dla punktów A i B spełniających równość $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Przekształcenie T jest poprawnie i jednoznacznie określone za pomocą L. Jeśli znamy T oraz wiemy, że $L(S) = S'$, to możemy jednoznacznie odtworzyć przekształcenie L za pomocą równości $\overrightarrow{S'X'} = T(\overrightarrow{SX})$.

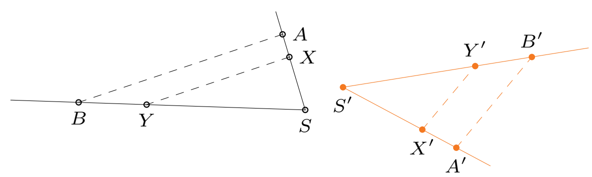
Krok 2. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ oraz $T(t\vec{v}) = tT(\vec{v})$ dla każdego wymiernego t.
Rozważmy takie punkty A, B, C, że $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Wtedy

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

Dalej indukcyjnie $T((n+1)\vec{v}) = T(n\vec{v} + \vec{v}) = T(n\vec{v}) + T(\vec{v}) = nT(\vec{v}) + T(\vec{v}) = (n+1)T(\vec{v})$ z warunkiem początkowym $n = 1$. Stąd $mT(\frac{n}{m}\vec{v}) = T(n\vec{v}) = nT(\vec{v})$, więc $T(\frac{n}{m}\vec{v}) = \frac{n}{m}T(\vec{v})$. Pozostaje zauważyć, że $T(-\vec{v}) = -T(\vec{v})$.

Rozważmy proste ℓ_a i ℓ_b przecinające się w punkcie S. Niech $A, B \neq S$ będą odpowiednio punktami na prostych ℓ_a i ℓ_b oraz niech $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$. Określmy funkcję $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w taki sposób, że $T(x\vec{a}) = \phi(x)T(\vec{a})$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Analogicznie niech $T(y\vec{b}) = \psi(y)T(\vec{b})$. Z poprzedniego kroku wynika, że $\psi(t) = \phi(t) = t$ dla wszystkich t wymiernych.

Krok 3. $\phi = \psi$.
Niech $x = y$ oraz $\overrightarrow{SX} = x\vec{a}$ i $\overrightarrow{SY} = y\vec{b}$. Mamy $XY \parallel AB$, więc $X'Y' \parallel A'B'$. Stąd $\phi(x) = \psi(y)$.



Krok 4. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ dla x i y rzeczywistych.
Zachodzą równości: $\phi(x)T(\vec{a}) + \phi(y)T(\vec{a}) = T(x\vec{a}) + T(y\vec{a}) = T(x\vec{a} + y\vec{a}) = T((x + y)\vec{a}) = \phi(x + y)T(\vec{a})$.

Krok 5. Funkcja ϕ jest niemalejąca.
Rozważmy wektor $\vec{v} = x\vec{a} + \vec{b}$. Wektor $x\vec{v}$ jest do niego równoległy, więc wektory $T(\vec{v}) = \phi(x)T(\vec{a}) + T(\vec{b})$ i $T(x\vec{v}) = \phi(x^2)T(\vec{a}) + \phi(x)T(\vec{b})$ są równoległe. Mają one zatem proporcjonalne współczynniki przy $T(\vec{a})$ i $T(\vec{b})$, co prowadzi do równości $\phi(x^2) = \phi(x)^2$. Wnioskujemy stąd, że jeśli $t \geqslant 0$, to $\phi(t) = \phi(\sqrt{t})^2 \geqslant 0$. Dla $y \geqslant x$ zapiszmy $y = x + t$. Mamy $\phi(y) = \phi(x + t) = \phi(x) + \phi(t) \geqslant \phi(x)$.

Krok 6. $\phi(t) = t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
Funkcja ϕ jest niemalejąca oraz identycznościowa na zbiorze liczb wymiernych, więc jest identycznościowa na zbiorze liczb rzeczywistych, gdyż zbiór liczb wymiernych jest w nim gęsty.

Zauważmy, że teza kroku 6 tłumaczy się na równość z warunku (2). Uff, koniec dowodu!