# Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 764 ($WT = 1{,}66$), 765 ($WT = 3{,}4$) z numeru 10/2023

| | | |
|---|---|---|
| Tomasz Wietecha | Tarnów | 17–44 + 1,44 |
| Marian Łupieżowiec | Gliwice | 2–43,02 |
| Jacek Konieczny | Poznań | 38,28 |
| Konrad Kapcia | Poznań | 2–35,60 |
| Ryszard Baniewicz | Włocławek | 1–34,07 |
| Paweł Perkowski | Ożarów Maz. | 5–26,27 |
| Andrzej Nowogrodzki | Chocianów | 3–22,20 |
| Jan Zambrzycki | Białystok | 4–15,35 |

## Zadania z fizyki nr 778, 779

*Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**778.** Na osi długiej rury o lustrzanej powierzchni wewnętrznej znajduje się punktowe, izotropowe źródło światła oraz całkowicie pochłaniająca światło kulka o promieniu $r = 1$ cm. Środek kulki znajduje się w odległości $l = 2$ cm od źródła. Jaki powinien być promień wewnętrzny rury, aby kulka pochłaniała połowę energii emitowanej przez źródło?

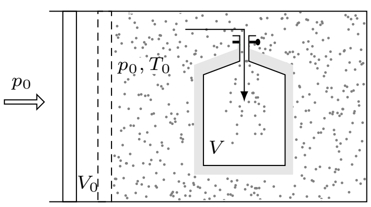
**779.** W pionowo ustawionym naczyniu, pod ciężkim tłokiem znajduje się niewielka ilość helu. Nie ma ciśnienia atmosferycznego, tłok „wisi" na wysokości $H$ nad dnem naczynia, a jego tarcie o ścianki naczynia jest zaniedbywalne. Tłok bardzo szybko podniesiono na wysokość $10H$ względem dna naczynia (tak, że podczas podnoszenia nie dochodziło do zderzeń z cząsteczkami gazu) i po ustaleniu się równowagi puszczono swobodnie. Na jakiej wysokości nad dnem naczynia tłok zatrzymał się, gdy ustały jego drgania? Naczynie nie przewodzi ciepła, pojemność cieplną ścianek i tłoka można zaniedbać, hel traktujemy jako gaz doskonały.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2024

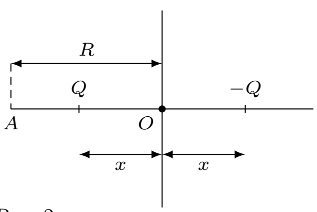
Przypominamy treść zadań:

**770.** Z izolowanego cieplnie naczynia o objętości wewnętrznej $V$ odpompowano wypełniający je gaz, osiągając wysoką próżnię. Otaczające powietrze ma temperaturę $T_0$ i ciśnienie $p_0$. W pewnym momencie otworzono kran zamykający naczynie, i nastąpiło jego szybkie napełnienie powietrzem atmosferycznym. Jaką temperaturę $T$ miało powietrze w naczyniu po jego napełnieniu i zamknięciu kranu? Powietrze traktujemy jako gaz doskonały, którego wykładnik adiabaty $\gamma = c_p/c_V$ jest dany, pojemności cieplnej ścianek naczynia nie uwzględniamy.

**771.** Cząstkę punktową o masie $m$ i ładunku $Q$ umieszczono w odległości $R$ od nieskończonej płaszczyzny przewodzącej i puszczono swobodnie. Po jakim czasie cząstka doleci do płaszczyzny? Siły ciężkości nie uwzględniamy.




Rys. 1




Rys. 2

**770.** Napełnianie naczynia zachodzi szybko, można więc zaniedbać wymianę ciepła między powietrzem wchodzącym do naczynia a powietrzem atmosferycznym. Powietrze wchodzi do naczynia w postaci strumienia, którego energia kinetyczna uzyskana zostaje dzięki pracy $W$ wykonanej przez siłę parcia powietrza atmosferycznego. Energia ta zamienia się na energię chaotycznego ruchu cząsteczek powietrza w naczyniu, więc zmiana energii wewnętrznej powietrza, które dostało się do naczynia, równa jest pracy $W$.

(1) $$\Delta U = nc_V\,(T - T_0) = W,$$

gdzie $n$ jest liczbą moli powietrza, które weszło do naczynia, a $c_V$ jego ciepłem molowym przy stałej objętości.

Aby obliczyć pracę $W$, możemy wyobrazić sobie, że nasze opróżnione naczynie znajduje się wewnątrz wypełnionego powietrzem dużego cylindra z ruchomym tłokiem (rys. 1). Ciśnienie i temperatura wewnątrz cylindra są takie same jak w atmosferze. Procesowi napełniania naczynia towarzyszy przemieszczanie tłoka, przy zachowaniu stałego ciśnienia $p_0$. Ponieważ do opróżnionego naczynia weszło dokładnie tyle powietrza, ile wyparł przemieszczający się tłok, możemy napisać:

(2) $$W = p_0V_0 = nRT_0,$$

gdzie $V_0$ jest zmniejszeniem objętości cylindra, a $R$ stałą gazową.

Z (1) i (2) temperatura końcowa wyraża się zależnością:

$$T = T_0\,(1 + R/c_V) = \gamma T_0.$$

Wynik nie zależy od objętości naczynia ani od wartości ciśnienia atmosferycznego. Nie zależy też od tego, czy zapełnianie naczynia zostanie doprowadzone do końca, gdy ciśnienie w nim wyrówna się z ciśnieniem atmosferycznym, czy też naczynie zamkniemy wcześniej.

**771.** W obecności cząstki naładowanej na płaszczyźnie przewodzącej pojawiają się ładunki przyciągane przez tę cząstkę. Ich działanie równoważne jest działaniu ładunku obrazu o wartości $-Q$ umieszczonego w takiej samej odległości od płaszczyzny po jej drugiej stronie.

Ponieważ zarówno siła Coulomba, jak i siła grawitacji są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między oddziałującymi obiektami, możemy wykorzystać naszą wiedzę z grawitacji. Wprowadźmy masę $M$ umieszczoną w punkcie $O$ (rys. 2), której siła oddziaływania grawitacyjnego z cząstką o masie $m$ odległą o $x$ od punktu $O$ jest taka sama, jak siła oddziaływania kulombowskiego cząstki o ładunku $Q$ z ładunkiem obrazem:

$$F = GMm/x^2 = kQ^2/4x^2,\ \text{stąd}\ M = kQ^2/4Gm.$$

Rozważmy teraz cząstkę o masie $m$, która krąży wokół nieruchomej masy $M$ po orbicie kołowej o promieniu $R$. Jej okres obiegu $T_0 = 2\pi\sqrt{R^3/GM}$.

Zmniejszając prędkość tej cząstki w punkcie $A$, otrzymujemy tory eliptyczne, których jedno z ognisk znajduje się w punkcie $O$, a drugie dąży do punktu $A$, gdy prędkość początkowa cząstki dąży do zera. Ta graniczna elipsa o półosi wielkiej równej $a = R/2$ to tor cząstki o masie $m$ spadającej na masę $M$. Zgodnie z trzecim prawem Keplera okres obiegu po tej elipsie

$$T = T_0\sqrt{a^3/a_0{}^3} = T_0/2\sqrt{2},\ \text{gdzie}\ a_0 = R.$$

Szukany czas, po którym cząstka naładowana doleci do płaszczyzny, jest dwa razy krótszy:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{Q}\sqrt{\frac{Rm}{2k}}.$$

# Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2024

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 867 ($WT = 1{,}85$) i 868 ($WT = 1{,}48$) z numeru 10/2023

| | | |
|---|---|---|
| Radosław Kujawa | Wrocław | 45,05 |
| Paweł Najman | Kraków | 43,16 |
| Jerzy Cisło | Wrocław | 42,30 |
| Janusz Fiett | Warszawa | 42,00 |
| Marek Spychała | Warszawa | 41,47 |
| Adam Woryna | Ruda Śl. | 40,91 |
| Janusz Olszewski | Warszawa | 40,89 |
| Paweł Kubit | Kraków | 38,15 |
| Piotr Kumor | Olsztyn | 37,94 |
| Piotr Wiśniewski | Warszawa | 36,97 |
| Łukasz Merta | Kraków | 36,08 |

Do matematycznego Klubu 44 wchodzi pan Radosław Kujawa. A tuż pod linią mety widzimy wielkie zagęszczenie – oczekujemy masowego jej przekraczania w najbliższych dwóch seriach.

## Zadania z matematyki nr 881, 882

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**881.** Ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest określony wzorami: $a_0 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

**882.** Na bokach $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ równoległoboku $ABCD$ wybrano, odpowiednio, punkty $K, L, M, N$, różne od wierzchołków. Weźmy pod uwagę trójkąty $ANK$, $BKL$, $CLM$, $DMN$. Udowodnić, że każda z następujących czwórek punktów stanowi czwórkę wierzchołków pewnego równoległoboku:
(**a**) ortocentra tych trójkątów;
(**b**) środki ciężkości tych trójkątów;
(**c**) środki okręgów opisanych na tych trójkątach.

Zadanie 882 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2024

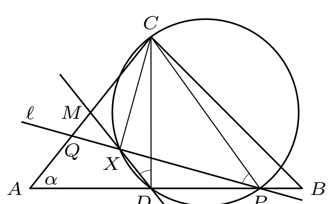
Przypominamy treść zadań:

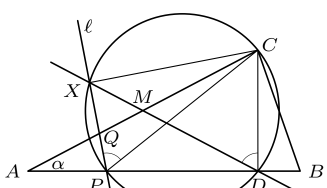
**873.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$. Niech $\ell$ będzie dowolną prostą przecinającą boki $AB$ i $AC$ odpowiednio w takich punktach $P$ i $Q$, że $\sphericalangle ACP + \sphericalangle APQ = 90^\circ$, i niech $X$ będzie rzutem prostokątnym punktu $C$ na prostą $\ell$. Udowodnić, że (dla ustalonego trójkąta $ABC$) wszystkie punkty $X$, uzyskane w ten sposób przy różnych dopuszczalnych położeniach prostej $\ell$, leżą na jednej prostej.

**874.** Liczba $\sqrt{7}$ została zapisana w systemie dwójkowym jako $10, c_1c_2c_3\ldots$; to znaczy, $\sqrt{7} = 2^1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i 2^{-i}$, $c_i \in \{0,1\}$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ suma $\sum_{i=n}^{2n} c_i$ jest dodatnia.

**873.** Oznaczmy $\sphericalangle CAB = \alpha$. Weźmy dowolną prostą $\ell$ i punkty $P, Q, X$, jak w treści zadania. Rachunek kątów w trójkącie $ACP$ pokazuje, że $\sphericalangle CPQ = 90^\circ - \alpha$. Skoro $\sphericalangle CPQ < 90^\circ$, to punkt $X$ leży na półprostej $PQ^{\rightarrow}$ (na odcinku $PQ$ lub na jego przedłużeniu). Zatem także $\sphericalangle CPX = 90^\circ - \alpha$.

Prowadzimy wysokość $CD$. Usytuowanie punktów $A, D, P$ na prostej $AB$ może być różne (rysunki ilustrują dwie wybrane możliwości), ale dalsze rozumowanie nie zależy od konfiguracji. Okrąg o średnicy $CP$ przechodzi przez punkty $D$ oraz $X$. Punkty $P$ i $D$ leżą po jednej stronie prostej $CX$, skąd wynika, że $\sphericalangle CDX = \sphericalangle CPX = 90^\circ - \alpha$.




Prosta $DX$ przecina bok $AC$ w punkcie, który nazwiemy $M$. Tak więc $\sphericalangle ADM = 90^\circ - \sphericalangle CDX = \alpha$, i wobec tego trójkąt $ADM$ jest równoramienny: $AM = DM$. To oznacza, że w trójkącie prostokątnym $ADC$ punkt $M$ jest środkiem przeciwprostokątnej $AC$.

W ustalonym trójkącie $ABC$ punkty $D$ i $M$ są jego ustalonymi punktami; spodek wysokości z wierzchołka $C$ i środek boku $AC$. Punkt $X$ leży na prostej wyznaczonej przez te dwa charakterystyczne punkty trójkąta $ABC$. Jest to prosta, o którą chodzi w tezie zadania.

**874.** Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że dla pewnego $n \geqslant 1$ cyfry (binarne) $c_i$ o numerach $i = n, \ldots, 2n$ są wszystkie zerami. Niech

$$A_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} c_i.$$

Dostajemy dwustronne oszacowanie:

$$0 < \sqrt{7} - A_n < \sum_{i=2n+1}^{\infty} 2^{-i} c_i \leqslant 4^{-n}.$$

Mnożymy uzyskaną nierówność podwójną przez $\sqrt{7} + A_n$, biorąc ponownie pod uwagę, że $A_n < \sqrt{7}$:

$$0 < 7 - A_n^2 < 4^{-n}\bigl(\sqrt{7} + A_n\bigr) < 4^{-n} \cdot 2\sqrt{7}.$$

Po pomnożeniu jeszcze przez $4^{n-1}$ otrzymujemy

$$0 < 4^{n-1} \cdot 7 - \bigl(2^{n-1} A_n\bigr)^2 < \tfrac{1}{2}\sqrt{7}.$$

Liczba w nawiasie jest całkowita, więc powyższa różnica musi być równa 1 (to jedyna liczba całkowita w przedziale $(0, \frac{1}{2}\sqrt{7}\,)$). Zatem

$$\bigl(2^{n-1} A_n\bigr)^2 = 4^{n-1} \cdot 7 - 1.$$

Ale kongruencja $x^2 \equiv -1 \pmod 7$ nie ma rozwiązań. Sprzeczność kończy dowód.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.