Jak i gdzie istnieją przedmioty matematyki?

*Wydział Matematyki i Informatyki UAM

*Roman MURAWSKI**

Potocznie mówi się, że matematyka to badanie własności (różnych rodzajów) liczb, funkcji, figur geometrycznych, abstrakcyjnych przestrzeni itd. Czym jednak są te obiekty, jak i gdzie one istnieją, jaka jest ich natura, czy są *tworzone* (konstruowane) przez matematyków, czy też są im w jakiś sposób dane i matematycy *odkrywają* je i ich własności? Na tego typu pytania odpowiedzi szukać należy nie w samej matematyce, ale w filozofii matematyki.

Na temat filozofii matematyki i jej historii zob. np. R. Murawski, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów* oraz *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych* i *Współczesna filozofia matematyki*. Dla bardziej zaawansowanych: R. Murawski i T. Bedürftig, *Philosophy of Mathematics* oraz *Philosophie der Mathematik*.

Czym jest filozofia matematyki? Najprościej można powiedzieć, że jest to filozoficzna refleksja nad matematyką jako nauką. Szuka się więc w niej m.in. odpowiedzi na pytanie o naturę i sposób istnienia przedmiotów matematycznych i analizuje się metody poznawcze właściwe matematyce.

Pytanie o naturę i sposób istnienia obiektów matematyki związane jest z pewnym starym problemem filozoficznym zwanym sporem o powszechniki (uniwersalia), a sformułowanym już przez Platona (427–347 p.n.e.). Otóż Platon pytał o to, co odpowiada pojęciom ogólnym, takim jak człowiek, piękno, dobro, prosta, liczba, trójkąt itd. W historii pojawiły się cztery zasadnicze stanowiska będące odpowiedzią na to pytanie: skrajny realizm pojęciowy, umiarkowany realizm pojęciowy, konceptualizm oraz nominalizm.

Wedle realizmu skrajnego (reprezentował go m.in. Platon) uniwersalia istnieją obiektywnie jako odrębne, zmysłowo niedostępne przedmioty. Realizm umiarkowany, który reprezentował na przykład Arystoteles (384–322 p.n.e.), twierdzi, że uniwersalia istnieją obiektywnie, ale nie jako odrębne, różne od rzeczy przedmioty, lecz jako własności wspólne tym rzeczom. Konceptualizm, zapoczątkowany przez Johannesa Roscelina (ok. 1050 – ok. 1120), głosi, iż uniwersalia są (jedynie) pojęciami i istnieją tylko w umyśle ludzkim. Nominalizm wreszcie, zapoczątkowany przez Williama Ockhama (ur. przed 1300, zm. ok. 1350), powiada, że uniwersalia w ogóle nie istnieją, istnieją bowiem tylko przedmioty jednostkowe; złudzenie zaś, że istnieją uniwersalia, ma swe źródło w dezinterpretacji języka, w którym funkcjonują nazwy ogólne (pozwalające na skracanie wypowiedzi).

Wymienione tu koncepcje (z wyjątkiem drugiej) mają swoje odbicie w odpowiedzi na tytułowe pytanie dotyczące sposobu istnienia przedmiotów matematyki. Odpowiednie stanowiska nazywa się platonizmem, konceptualizmem i nominalizmem.

Przez platonizm rozumie się stanowisko głoszące, że przedmioty matematyki istnieją obiektywnie, samoistnie, niezależnie od czasu i przestrzeni oraz od poznającego umysłu. Są więc one dane matematykowi. Matematyk zatem *odkrywa* przedmioty matematyki i ich własności oraz je opisuje. Gdyby więc na świecie nie było żadnego matematyka, to i tak istniałyby wszystkie przedmioty matematyki mające swoje własności (te które znamy dziś, te które poznamy jutro, ale i te, których nigdy nie poznamy i o których matematycy nigdy mówić nie będą). Zgodnie z tym mówić należy, że matematyk *odkrył* daną teorię, a nie, że ją stworzył; w szczególności powinniśmy powiedzieć, że Leibniz i Newton *odkryli* rachunek różniczkowy i całkowy, a nie, że go stworzyli.

Platonizm głosiło wielu ważnych matematyków. Sam Platon twierdził, że podstawą poznania matematycznego jest rozum, a właściwą metodą matematyki metoda aksjomatyczna. Zdawał sobie oczywiście sprawę z tego, że matematyk posługuje się w swojej pracy obserwacją i rysunkiem, ale jest to wedle niego jedynie okazja do uświadomienia sobie pojęć, a nie materiał do ich wytworzenia.

Ku platonizmowi skłaniał się też Euklides (ok. 365 – ok. 300 p.n.e.), autor słynnych Elementów. Głosili go również m.in. tacy matematycy współcześni, jak Georg Cantor[1] (1845–1918), twórca teorii mnogości, Gottlob Frege[2] (1848–1925), twórca logicyzmu (ważnego kierunku w filozofii matematyki, twierdzącego, że matematyka jest redukowalna do logiki) czy jeden z największych logików

[1]W roku 1884 Cantor w liście do G. Mittag-Lefflera pisał: „Jeśli chodzi o rzeczy pozostałe [mianowicie o rzeczy poza stylem i sposobem przedstawienia – R.M.], to wszystko to nie jest moją zasługą, w stosunku do treści moich prac jestem jedynie sprawozdawcą i urzędnikiem (*nur Berichterstatter und Beamter*)".

[2]Frege w *Grundlagen der Arithmetik* (punkt. 106) pisał: „Okazało się, że liczba, którą zajmuje się arytmetyka, musi być traktowana nie jako niesamodzielny atrybut, lecz rzeczownikowo (*substantivisch*). Liczba jawi się więc jako rozpoznawalny przedmiot, chociaż nie fizyczny ani nawet nie przestrzenny, czy taki, który moglibyśmy sobie jakoś wyobrazić".

Kurt Gödel[3] (1906–1978). O swoich odczuciach związanych z pracą badawczą w zakresie logiki matematycznej (zwanej wówczas logistyką) – a uwagi te dotyczą także badań matematycznych – pisał obrazowo wybitny polski logik Jan Łukasiewicz (1878–1956), zwolennik platonizmu:

> „Chciałbym na zakończenie tych uwag nakreślić obraz związany z najgłębszymi intuicjami, jakie odczuwam zawsze wobec logistyki. Obraz ten rzuci może więcej światła na istotne podłoże, z jakiego przynajmniej u mnie wyrasta ta nauka, niż wszelkie wywody dyskursywne. Otóż ilekroć zajmuję się najdrobniejszym nawet zagadnieniem logistycznym, szukając na przykład najkrótszego aksjomatu rachunku implikacyjnego, tylekroć mam wrażenie, że znajduję się wobec jakiejś potężnej, niesłychanie zwartej i niezmiernie odpornej konstrukcji. Konstrukcja ta działa na mnie jak jakiś konkretny, dotykalny przedmiot, zrobiony z najtwardszego materiału, stokroć mocniejszego od betonu i stali. Nic w niej zmienić nie mogę, nic sam dowolnie nie tworzę, lecz w wytężonej pracy odkrywam w niej tylko coraz to nowe szczegóły, zdobywając prawdy niewzruszone i wieczne. Gdzie jest i czym jest ta idealna konstrukcja? Filozof wierzący powiedziałby, że jest w Bogu i jest myślą Jego".

Przyjęcie platonizmu implikuje, że problem prawdy i prawdziwości w matematyce staje się prosty. „Prawdziwy" znaczy bowiem tyle, co „zgodny ze stanem rzeczy w rzeczywistości matematycznej". Nie ma więc miejsca na problemy nierozstrzygalne w matematyce. Każdy problem typu pytania–rozstrzygnięcia, „tak–nie" (a więc np. hipoteza Riemanna czy hipoteza continuum) ma już istniejące jednoznaczne rozwiązanie i zadaniem matematyka jest znaleźć odpowiednie metody, by do tej odpowiedzi dotrzeć, by ją *odkryć*. Co więcej, platonizm implikuje, że uniwersum matematyczne staje się bardzo szerokie – jedynym bowiem kryterium istnienia jest tu niesprzeczność, tzn. istnieje każdy obiekt niesprzeczny.

Konceptualizm głosi, że przedmioty matematyki są wytworem umysłu ludzkiego. Istnieją zatem tylko obiekty matematyczne konstruowalne, czyli te, które można skonstruować z obiektów, których istnienie jest intuicyjnie jasne. Konceptualistą był na przykład matematyk, teolog i ostatni scholastyk kardynał Mikołaj z Kuzy (1401–1464). Głosił on, że zarówno liczby, jak i obiekty geometrii są tworami ludzkiego umysłu. Są one odbiciami, obrazami (*ymago*) liczb i obiektów geometrycznych istniejących w umyśle Bożym. Konceptualizm głosili też Henri Poincaré (1854–1912) i Richard Dedekind[4] (1831–1916). Najsilniej konwencjonalizm doszedł do głosu w intuicjonizmie zainicjowanym przez matematyka niderlandzkiego Luitzena Egbertusa Jana Brouwera (1881–1961). Według niego matematyka jest funkcją intelektu ludzkiego i wolną, życiową aktywnością rozumu, jest wytworem umysłu ludzkiego. Istnieje w matematyce tylko to, co jest konstruowalne przez myśl (choć niekoniecznie aktualnie skonstruowane)[5]. Konsekwencją takiego stanowiska jest odrzucenie metody aksjomatycznej w matematyce, odrzucenie nieskończoności aktualnej (i konieczność ograniczenia się jedynie do nieskończoności potencjalnej) czy wreszcie znaczne ograniczenie zarówno świata przedmiotów matematycznych, jak i metod dopuszczalnych w matematyce.

Trzecie wyróżnione przez nas stanowisko – nominalizm – głosi, że przedmioty matematyki to jednostkowe obiekty (fizyczne), a więc napisy i nic więcej. Choć stanowisko to wydawać się może dziwne, to miało ono wielu zwolenników – należeli do nich m.in. Bertrand Russell (1872–1970) i Alfred North Whitehead (1861–1947), a także niektórzy wybitni logicy polscy, w szczególności Alfred Tarski[6] (1901–1983), Stanisław Leśniewski (1886–1939) oraz Leon Chwistek (1894–1944). Nominalizm ma dziś wielu zwolenników, zwłaszcza w anglosaskiej filozofii matematyki. Zauważmy, że prowadzi on do bardzo silnego zawężenia przestrzeni obiektów matematycznych, eliminując wszelkie obiekty abstrakcyjne (na przykład zbiory, które powinno się interpretować jako wypowiedzi, czy raczej skróty wypowiedzi, o indywiduach).

[3] Gödel w pracy *Russell's Mathematical Logic* (1944) pisał: „Klasy i pojęcia mogą być pojmowane jako rzeczywiste obiekty istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji", a w *Mathematics and the Metaphysicians* (1901) znajdujemy zdania: „Logika [a także matematyka, jak wynika z dalszych rozważań Russella – R.M.] zajmuje się światem realnym, tak jak zoologia, aczkolwiek bada bardziej abstrakcyjne i ogólne jego własności. [...] Wydaje mi się, że założenie istnienia takich obiektów jest tak samo uzasadnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych, a jest przecież wiele racji, by przyjąć ich istnienie. Są one tak samo konieczne do skonstruowania satysfakcjonującej teorii matematycznej, jak ciała fizyczne są konieczne do otrzymania sensownej teorii percepcji zmysłowej".

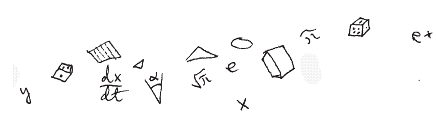
[4] W pracy *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872), gdzie Dedekind zbudował poprawną teorię liczb rzeczywistych (definiując liczby niewymierne za pomocą przekrojów), pisał: „Za każdym więc razem, gdy dany jest przekrój (A_1, A_2), który nie jest wyznaczony przez żadną liczbę wymierną, *stwarzamy* (*erschaffen wir*) nową liczbę – liczbę niewymierną, którą traktować będziemy jako całkowicie wyznaczoną przez ten przekrój (A_1, A_2); [...]". Zauważmy, że użyte w oryginale niemieckim słowo „erschaffen" to słowo, którym oddaje się w niemieckim przekładzie Biblii hebrajski termin בָּרָא [bara] występujący w Księdze Rodzaju 1,1, w opisie stwórczego działania Boga. Par. 4 tej pracy, w którym Dedekind wprowadził liczby niewymierne, zatytułowany jest „Stworzenie (*Schöpfung*) liczb niewymiernych", w par. 1 pisze zaś, że liczby zostały „stworzone przez ducha ludzkiego" (*durch den menschlichen Geist erschaffen*).

[5] Arend Heyting, uczeń Brouwera, pisał w pracy *Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik* (1931) tak: „Przedmioty matematyczne z natury swej są zależne od ludzkiej myśli, i to nawet gdyby były niezależne od indywidualnych aktów myślenia. Istnienie ich jest zagwarantowane o tyle tylko, o ile mogą być określone przez myśl".

[6] W jednym z wywiadów Tarski mówił o sobie: „Jestem nominalistą. Jestem o tym głęboko przekonany. W istocie tak głęboko, że nawet po mojej trzeciej reinkarnacji nadal będę nominalistą". W czasie sympozjum w Chicago w roku 1965 powiedział: „Okazuję się dużo bardziej skrajnym antyplatonikiem. [...] Reprezentuję jednak ten surowy, naiwny rodzaj antyplatonizmu, który określiłbym jako materializm albo nominalizm z pewną skazą materialistyczną". W liście do Josepha H. Woodgera z 21 listopada 1948 roku pisał: „Problem zbudowania logiki i matematyki nominalistycznej interesuje mnie mocno od wielu, wielu lat".

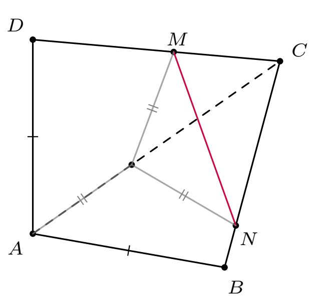
Zadajmy teraz pytanie: Które z opisanych stanowisk jest słuszne i prawdziwe? Odpowiedź brzmi: Nie wiemy! Sama matematyka nie daje tu rozstrzygnięcia. Nie ma to jednak żadnego wpływu na uprawianie i rozwijanie matematyki. Podobnie jest zresztą i w innych naukach. Można, dla przykładu, prowadzić badania w biologii, nie rozstrzygając, czym jest życie, czy badania socjologiczne bez jasnej i precyzyjnej definicji społeczeństwa. Matematycy zresztą rzadko zastanawiają się nad kwestiami filozoficznymi związanymi z uprawianą dyscypliną. Jeśli zaś już się zastanawiają i głoszą jakieś poglądy, to niekoniecznie są im wierni w swojej praktyce badawczej. Przykładem może być Tarski. Otóż, będąc zwolennikiem nominalizmu, swobodnie stosował w swoich badaniach metamatematycznych środki nieskończonościowe (dopuszczalne jedynie przez platonizm) albo zajmował się badaniem logiki intuicjonistycznej, nie podzielając przekonań konceptualistycznych.

Obserwacja pokazuje, że w pracy badawczej matematycy zachowują się na ogół jak platonicy. Oznacza to, że nie są oni panami czy kreatorami rzeczywistości matematycznej – przeciwnie, stają wobec *danej* im „twardej" rzeczywistości, którą starają się *opisać*. Akceptując „na co dzień" platonizm, „od święta" jednak, tzn. kiedy zastanawiają się nad kwestiami filozoficznymi, deklarują się na ogół jako formaliści, twierdząc, że matematyka to zespół aksjomatyczno-dedukcyjnych systemów sformalizowanych i cała praca matematyka polega na dedukcji twierdzeń z przyjętych aksjomatów za pomocą dowolnych poprawnych metod.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK



M 1780. Czworokąt wypukły, w którym $AB = AD$, jest wpisany w okrąg. Punkty M i N leżą na odcinkach CD i BC tak, że $DM + BN = MN$. Udowodnić, że środek okręgu opisanego na trójkącie AMN leży na odcinku AC.
Rozwiązanie na str. 19

M 1781. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie x i y takie, że

$$2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 128 \quad \text{oraz} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie na str. 15

M 1782. Dane są liczby rzeczywiste $a > b$ takie, że $a^p - b^p$ jest liczbą całkowitą dla dowolnej liczby pierwszej p. Udowodnić, że a i b są liczbami wymiernymi.
Rozwiązanie na str. 17

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1095. W szczelnie zamkniętym naczyniu znajduje się $m = 54$ g pary wodnej w temperaturze $t_1 = 100$°C. Ile ciepła należy dostarczyć, aby ogrzać tę parę do $t_2 = 200$°C? Masa atomowa tlenu $\mu_O = 16$, masa atomowa wodoru $\mu_H = 1$, a uniwersalna stała gazowa $R = 8{,}314$ J/mol.
Rozwiązanie na str. 18

F 1096. Ciało o masie m porusza się wzdłuż linii prostej OX pod działaniem siły potencjalnej. Potencjał siły jako funkcja współrzędnej x opisany jest wzorem:

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}.$$

Jaki jest okres małych drgań ciała wokół położenia równowagi (minimum potencjału)?
Rozwiązanie na str. 16