Z trzema kropkami trzeba uważać...

*Michał MIŚKIEWICZ**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

...zwłaszcza gdy kryje się za nimi konieczność wykonania nieskończenie wielu operacji. Związane z tym pułapki zobaczymy na przykładzie następujących nieskończonych sum, podanych w kolejności od najmniej do najbardziej podejrzanej:

$$\text{(A)}\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{2}{3},\qquad \text{(B)}\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln(2),$$

$$\text{(C)}\quad 1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2},\qquad \text{(D)}\quad 1+2+3+4+\ldots=-\frac{1}{12}.$$

Należy domyślać się, że autor miał na myśli sumowanie następujących ciągów: (A) $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$, (B) $b_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, (C) $c_n=(-1)^n$, (D) $d_n=n$.

Wątpliwości tego typu można uniknąć, zapisując sumę przy użyciu dużej litery sigma: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, ...

Pierwsza pułapka jest dość powierzchowna: trzeba się domyślić, jakie są kolejne wyrazy sumy. Trudność tę można ominąć, podając ogólny wzór (jak na marginesie); w przypadku (A) będzie to $a_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$, dla $n=0,1,2,\ldots$

Drugą pułapkę szybko zauważymy, gdy odruchowo chwycimy za kalkulator i zaczniemy dodawać (względnie odejmować) kolejne wyrazy. Otóż wyrazów sumy jest nieskończenie wiele, a zatem przed nami nieskończenie dużo pracy. Odruch może się jednak opłacić – w przypadku (A) po uwzględnieniu pierwszych czterech wyrazów mamy **0,6**25 i każdy następny wynik też zaczyna się od 0,6. Po dziesięciu wyrazach na wyświetlaczu kalkulatora widzimy **0,666**015625 i trzy szóstki już zostają. Ogólnie $4k$ wyrazów wystarczy, by k pierwszych cyfr po przecinku ustaliło się jako same szóstki. W ten sposób dochodzimy do konkluzji, że suma (A) wynosi 0,(6), czyli właśnie $\frac{2}{3}$.

Zadanie 1. Ze wzoru $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+\ldots+x+1)$ wyprowadzić jawny wzór na sumy kolejnych wyrazów (A) i wywnioskować, że zbiegają one do $\frac{2}{3}$.

Szeregi zbieżne i rozbieżne. W ten sam sposób określa się wartość nieskończonych sum (uczenie mówimy: *szeregów*) w wielu innych przypadkach. Otóż patrzymy na tak zwany ciąg *sum częściowych*: $a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2,\ldots$ Jeśli ciąg ten jest zbieżny, to jego granicę przyjmujemy za szukaną wartość; w przeciwnym przypadku szereg (sumę) uznajemy za rozbieżny, nieposiadający dobrze określonej wartości. Według tej procedury w przypadku (B) uzyskujemy ciąg sum częściowych (w obcięciu do trzech cyfr po przecinku):

1,000, 0,500, 0,833, 0,583, 0,783, 0,616, 0,759, 0,634, 0,745, 0,645, ...

Co prawda wcale tego nie widać, ale zbiega on do logarytmu naturalnego z 2, czyli w przybliżeniu 0,693 – przyjmijmy to na wiarę.

Zadanie 2. Wykazać zbieżność szeregu (B) do $\ln(2)$. Można przyjąć bez dowodu, że różnica między $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ (sumą odwrotności pierwszych n liczb naturalnych) a $\ln(n)$ jest ciągiem zbieżnym.
(Dowód tego faktu można znaleźć w Δ^5_{23}, na marginesie artykułu Grzegorza Łukaszewicza).

Niestety już dla (C) sumy częściowe wynoszą na przemian 1 i 0, a więc nie tworzą ciągu zbieżnego. Matematykom zeszłych stuleci bardzo zależało, żeby temu i innym szeregom przypisać jednak jakąś wartość, wymyślili więc (nomen omen) szereg alternatywnych metod sumowania. Najprostszą jest sumowalność w sensie Cesàro – naszą dotychczasową procedurę wzbogacamy po prostu o dodatkowy krok, mianowicie ciąg sum częściowych zastępujemy ciągiem ich kolejnych średnich (n-ty wyraz takiego ciągu jest średnią z pierwszych n sum częściowych). Zamiast $1,0,1,0,\ldots$ otrzymujemy w ten sposób

1,000, 0,500, 0,666, 0,500, 0,600, 0,500, 0,571, 0,500, 0,555, ...,

co nieuchronnie zbiega do $\frac{1}{2}$. Warto odnotować, że metoda ta jest spójna z poprzednią: jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny, to ciąg ich średnich też, i to do tej samej granicy.

Godne polecenia są artykuły na angielskojęzycznej Wikipedii poświęcone szeregom (C) (*Grandi's series*, *Summation of Grandi's series*) oraz (D) $(1+2+3+4+\ldots)$. „Uzbieżnianiu” (B) oraz (C) i (D) poświęcone są świetne filmiki autorstwa Mathologera na platformie YouTubie:
Powell's π Paradox: the genius 14th century Indian solution,
Numberphile v. Math: the truth about $1+2+3+\ldots=-\frac{1}{12}$.

Do nadania sensu równości (D) potrzeba jeszcze więcej gimnastyki, gdyż wiąże się to z tak zwanym przedłużeniem analitycznym funkcji dzeta Riemanna. Metoda ta ma mało wspólnego z sumowaniem kolejnych liczb, więc użycie tu trzech kropek można uznać za nadużycie. Zainteresowany Czytelnik może jednak dowiedzieć się więcej, sięgając do odnośników na marginesie (lub do wielu innych dobrych opracowań).

Zadanie 3. Sprawdzić, że metodą Cesàro otrzymujemy
$1-1+1-1+\ldots\overset{C}{=}\frac{1}{2}$,
$0+1-1+1-1+\ldots\overset{C}{=}\frac{1}{2}$,
$1+0+0+\ldots\overset{C}{=}1$,
co ilustruje, że tą metodą można dwa szeregi sumować wyraz po wyrazie.

Szczegóły wspomnianych tu metod sumowania nie będą dla nas istotne, ważne jest jedynie to, że mają szereg własności wspólnych ze zwyczajnym sumowaniem skończenie wielu liczb. Na przykład, jeśli sumie $a_1+a_2+\ldots$ jakaś metoda nada wartość A, a sumie $b_1+b_2+\ldots$ wartość B, to ta sama metoda sumie $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots$ przypisze wartość $A+B$. Metody te pozwalają więc

Rozwiązanie zadania F 1094.
Okres drgań T wahadła fizycznego o masie m, momencie bezwładności I względem osi obrotu odległej o d od środka masy wahadła wynosi (g oznacza przyspieszenie ziemskie):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

Zmianie temperatury o $\Delta t = t_2 - t_1$ towarzyszy zmiana odległości atomów materiału wahadła $\alpha = 1 + \beta\Delta t$ razy. W tym samym stosunku zmieni się też odległość osi obrotu od środka masy wahadła, przyjmując wartość $d' = \alpha d$, a moment bezwładności przyjmie wartość $I' = \alpha^2 I$. Masa wahadła oczywiście pozostaje niezmieniona. Tym samym zimą okres wahadła wyniesie:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mgd'}} = T\sqrt{\alpha}.$$

Dla podanych wartości temperatur zimą $\alpha = 1 - 1{,}33 \cdot 10^{-4} < 1$, co oznacza, że zegar się spieszy. Różnica wskazań w stosunku do czasu dokładnego wyniesie więc 1 minutę po około $1{,}5 \cdot 10^4$ minutach, czyli po około 250,6 godziny, tj. ponad 10 dniach, jeśli założymy, że przez cały ten czas w pomieszczeniu panowała temperatura $t_2 = 18$ °C. Warto zauważyć, że, jak pokazuje nasze rozumowanie, wszystkie zegary z wahadłami wykonanymi z mosiądzu o takim samym składzie będą się jednakowo spieszyły.

„udawać”, że mamy do czynienia ze zwykłą sumą. Ale tutaj czeka na nas ostatnia pułapka…

Twierdzenie Riemanna. Dodawanie jest przemienne: $1 + 2 = 2 + 1$ i ogólnie suma dowolnie wielu liczb nie zależy od kolejności sumowania. I tutaj udawanie się kończy. W sumie (B) ustawmy wyrazy w innej kolejności:

$$(\mathrm{B}') \quad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

a więc zawsze po dwa dodatnie i jeden ujemny. Suma pierwszych trzech wyrazów to $\frac{5}{6} \approx 0{,}833$ i łatwo się przekonać, że kolejne sumy częściowe już nigdy nie spadają poniżej tej wartości, bo każda kolejna trójka daje dodatni wkład. W granicy na pewno otrzymujemy więc inny wynik niż w (B); istotnie, okazuje się, że jest to $\frac{3}{2}\ln(2) \approx 1{,}039$.

Może być gorzej! Twierdzenie dowiedzione przez Bernharda Riemanna mówi, że odpowiednio dobierając kolejność wyrazów, możemy w granicy otrzymać *każdą* liczbę rzeczywistą. Co więcej, tak samo jest dla każdego innego szeregu $\sum a_n$ *zbieżnego warunkowo*, czyli takiego, że szereg wartości bezwzględnych $\sum |a_n|$ sumuje się do nieskończoności (co oznacza, że ciąg sum częściowych jest zbieżny do nieskończoności).

I z tej pułapki jest wyjście. W ramach kursu analizy matematycznej studenci poznają zazwyczaj twierdzenie mówiące, że suma szeregu $\sum a_n$ nie zależy od kolejności sumowania, o ile szereg jest *zbieżny bezwzględnie*, co znaczy, że szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny. Twierdzenie to często pozostawia wrażenie, że nieskończone sumowanie nie jest przemienne, a jedynie pewne dodatkowe założenia pozwalają tę przemienność wymusić. Ale czy tak musi być? Postaram się przekonać Czytelnika, że nie.

Sumowanie à la Lebesgue. Zaczniemy od sumowania nieskończenie wielu liczb nieujemnych. Dla większej przejrzystości konstrukcji rozważmy nie tyle sumę ciągu liczb, co sumę wartości funkcji $a\colon X \to [0, \infty)$ określonej na pewnym zbiorze X. Jako wartość sumy $\sum a$ przyjmiemy supremum zbioru

$$\Big\{ \sum_{y \in Y} a(y) : Y \subseteq X \text{ jest skończonym podzbiorem} \Big\}.$$

Jest to najmniejsza liczba nie mniejsza od wszystkich pojawiających się wewnątrz klamerek powyżej. Innymi słowy, rozpatrujemy tylko *skończone* sumy wartości funkcji a; jeśli zbiór tych skończonych sum jest ograniczony z góry, to za $\sum a$ przyjmujemy najmniejsze ograniczenie górne; w przeciwnym przypadku przyjmujemy $\sum a = \infty$.

Podstawowa zaleta tej definicji jest oczywista: określona przez nas suma nie zależy od kolejności elementów zbioru X, bo też żadnej kolejności nie wyróżniliśmy. Za zbiór X można przyjąć zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$, a funkcje $a\colon \mathbb{N} \to [0, \infty)$ utożsamić z ciągami (a_n) o wyrazach nieujemnych. W ten sposób otrzymaliśmy pojęcie sumowalności szeregów o wyrazach nieujemnych zupełnie nieczułe na kolejność wyrazów.

Zadanie 4. Sprawdzić, że określona właśnie suma $\sum a$ pokrywa się z sumą $\sum a_n$ określoną jako granica ciągu sum częściowych.

Żeby rozszerzyć to pojęcie na szeregi $\sum a$ o dowolnych wyrazach rzeczywistych, sumujemy osobno wyrazy dodatnie i ujemne (przed tymi drugimi dostawiając minus) – jeśli jedne i drugie mają skończoną sumę, odpowiednio S_+ i S_-, to za sumę całości przyjmujemy $S_+ - S_-$.

Zadanie 5. Przekonać się, że powyższy warunek sumowalności szeregu $\sum a$ jest równoważny warunkowi $\sum |a| < \infty$, a określona właśnie suma pokrywa się z $\sum a_n$.

Gdy któraś z sum S_+, S_- jest nieskończona, szereg uznajemy za niesumowalny (co niestety ogranicza naszą metodę do szeregów bezwzględnie zbieżnych).

Jaki z tego morał? Po pierwsze, możemy odetchnąć z ulgą, że przemienność jest cechą przysługującą sumom tak skończonym, jak i nieskończonym, a fenomen twierdzenia Riemanna można złożyć na karb zbyt tolerancyjnych metod sumowania szeregów.

Po drugie, opisany sposób sumowania nie jest jedynie wymyśloną ad hoc sztuczką; wręcz przeciwnie, jest to szczególny przypadek *całki Lebesgue'a*. Czytelnik znający to pojęcie – na przykład z artykułu w Δ^4_{22} – wie, że całka Lebesgue'a to sposób „nieskończonego sumowania” naturalnie stowarzyszony z miarą. Przykładem miary na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest *miara licząca* ℓ, każdemu zbiorowi $A \subseteq \mathbb{N}$ przypisująca jego liczność. I okazuje się, że suma $\sum a$ jest tożsama z całką Lebesgue'a $\int_{\mathbb{N}} a(n)\,\mathrm{d}\ell(n)$ względem miary liczącej ℓ.

Ostatni morał jest nieco pesymistyczny. Sprowadzając zagadnienie sumowania do problemu mierzenia, wpadamy z deszczu pod rynnę – dziedzina ta jest bowiem bogata w paradoksy, jak choćby twierdzenie Banacha–Tarskiego (zob. *O kul rozmnażaniu* w Δ^4_{17}). Cóż, trzeba uważać…