Potęgi dwójki

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem bez wprowadzenia teoretycznego – zapraszam na porcję zadań o różnej tematyce, związanych z potęgami dwójki.

Zadania

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba naturalna k, że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr: $0, 1, 2, \ldots, 9$ występuje taką samą liczbę razy. (LXX OM)
2. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość $x + y + z = 0$. Udowodnić, że $x \cdot 2^x + y \cdot 2^y + z \cdot 2^z \geqslant 0$. (XI Wielkopolska Liga Matematyczna)
3. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielokąt, którego boki mają długości wyrażające się różnymi potęgami dwójki o wykładnikach całkowitych nieujemnych.
4. Niech a_n oznacza najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, która ma dokładnie n dzielników. Udowodnić, że w tym ciągu występuje nieskończenie wiele potęg dwójki.
5. Ustalmy liczbę nieparzystą n. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ określamy taką liczbę naturalną a_k, że $2^{a_k - 1} \leqslant \frac{n}{k} < 2^{a_k}$. Udowodnić, że $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n = n$. (IX WLM)
6. Wykazać, że dla całkowitych dodatnich n liczba $n!$ nie dzieli się przez 2^n.
7. Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że jeśli iloczyn k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez 4^k, to dokładnie jeden z czynników dzieli się przez 2^{k+1}. (XI WLM)
8. Dane są liczby całkowite dodatnie k, m i n, dla których $\mathtt{NWD}(km, n) = 1$. Udowodnić, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, że $a^k + b^m = c^n$.
9. W pewnym kraju jest $n + 1$ miast, ponumerowanych liczbami od 0 do n. Miasta o numerach a i b mają połączenie drogowe wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b$ jest potęgą dwójki. Udowodnić, że z każdego miasta można dojechać do każdego innego. (XIII WLM)
10. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n porównać liczby $2^{n!}$ i $(2^n)!$.
11. W ciągu niemalejącym $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ występują wyłącznie liczby całkowite dodatnie. Każda liczba występuje w nim dokładnie tyle razy, ile wynosi największy wykładnik potęgi dwójki dzielącej tę liczbę. Początkowe wyrazy wyglądają następująco:
$$2, 4, 4, 6, 8, 8, 8, 10, 12, 12, 14, 16, 16, 16, 16, 18, 20, 20, \ldots$$
Udowodnić, że $a_n > n$ dla wszystkich całkowitych dodatnich n. (XIII WLM)
12. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie, które można przedstawić w postaci $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ dla pewnych całkowitych dodatnich a i b. (Matematyczny Kalendarz Adwentowy 2021)
13. Rozważmy wszystkie liczby nieparzyste, które w zapisie dwójkowym mają dokładnie 120 jedynek. Udowodnić, że wśród nich jest nieskończenie wiele kwadratów liczb naturalnych. (MKA 2023)
14. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Niech r_k oznacza resztę z dzielenia przez n liczby $1 + 2 + \ldots + k$. Wyznaczyć wszystkie liczby n, dla których $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \ldots, n-1)$. (LX OM)
15. Wyznaczyć liczbę sposobów zapisu liczby całkowitej dodatniej n w postaci sumy potęg dwójki o wykładnikach całkowitych nieujemnych, jeśli każdy z wykładników może powtórzyć się co najwyżej trzy razy. (LXVI OM)
16. Rozważmy bardzo długi rząd wiaderek. W środkowym znajduje się n krówek, pozostałe są puste. Możemy wykonywać operacje dwóch typów: albo z wiaderka liczącego co najmniej 3 krówki przenosimy jedną krówkę do wiaderka bezpośrednio po prawej stronie i dwie krówki do wiaderka bezpośrednio po lewej, albo z wiaderka z co najmniej 2 krówkami przenosimy jedną krówkę do wiaderka bezpośrednio po prawej stronie i jedną zjadamy. Załóżmy, że po jakimś czasie nie da się już wykonać żadnego ruchu. Wykazać, że liczba pozostałych krówek równa jest liczbie jedynek w zapisie dwójkowym liczby n. (USA MTS 2019, zmodyfikowane)

Wskazówki do zadań

1. Sprawdzić podzielność przez 3.
2. Liczby t i $2^t - 1$ są tego samego znaku, więc $t(2^t - 1) \geqslant 0$.
3. Najdłuższy bok miałby długość większą od sumy długości pozostałych boków, gdyż $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k < 2^n$.
4. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $a_p = 2^{p-1}$.
5. W zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ jest dokładnie a_k liczb, które można (jednoznacznie!) zapisać w postaci iloczynu liczby nieparzystej k i potęgi dwójki.
6. Na mocy wzoru Legendre'a $\nu_2(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \lfloor n/2^k \rfloor < n$.
7. Niech $P = (m - a) \ldots (m + b)$ będzie rozważanym iloczynem, przy czym $m = t \cdot 2^n$ dla nieparzystego t z maksymalnym n. Wtedy, po skorzystaniu z tezy zadania 6, dostajemy: $2k \leqslant \nu_2(P) = n + \nu_2(a!) + \nu_2(b!) \leqslant$ $\leqslant n + a + b = n + k - 1$.
8. Istnieją takie liczby całkowite dodatnie x i y, że $x(km) + 1 = yn$ (por. Kącik 29 w Δ^5_{21}).
9. Z każdego miasta o niezerowym numerze można dojechać do jakiegoś miasta o numerze mniejszym.
10. Wykorzystać oszacowanie $m! < m^m$ dla $m = 2^n$. To rozwiązuje problem dla $n \geqslant 6$.
11. Liczba k występuje w ciągu $\nu_2(k)$ razy dla $k = 1, 2, \ldots, n$, więc $n \leqslant \nu_2(1) + \nu_2(2) + \ldots + \nu_2(a_n) =$ $= \nu_2(a_n!) < a_n$.
12. Jeśli $n = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$, to $n - 2 = \frac{(2b+1)(a-b)}{b(b+1)}$, więc $2b + 1 \mid n - 2$ (dlaczego?), czyli $n - 2$ nie może być potęgą dwójki.
W drugą stronę, jeśli $n - 2$ nie jest potęgą dwójki, to ma dzielnik nieparzysty d i można wziąć $b = \frac{1}{2}(d - 1)$ i $a = \frac{(d-1)(dn+n-2)}{4d}$.
13. $(2^{a_1} + \ldots + 2^{a_{15}})^2 =$ $= \sum_i 2^{2a_i} + \sum_{i<j} 2^{a_i + a_j + 1}$ – jest to suma 120 potęg dwójki. Należy jeszcze zadbać o to, by były to różne potęgi – wystarczy założyć $a_{i+1} > 2a_i$.
14. Niech $n = 2^m$. Jeśli $r_i = r_j$, to $2^{m+1} \mid (i - j)(i + j + 1)$, co prowadzi do $i = j$.
Niech $n = mp$, $p > 2$ pierwsze. Wtedy liczby r_{kp} i $r_{(k+1)p-1}$ są podzielne przez p dla $k = 0, 1, \ldots, m - 1$.
15. Niech $n = \sum_k a_k 2^k$ dla $a_k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Określmy $x = \sum_{k\colon a_k \geqslant 2} 2^k$ oraz $y = \sum_{k\colon a_k \in \{1,3\}} 2^k$. Zadajemy w ten sposób bijekcję między szukanymi sposobami zapisu a rozwiązaniami równania $2x + y = n$.
16. Ponumerujmy wiaderka liczbami całkowitymi tak, żeby n krówek było w wiaderku o numerze 0. Kierunki lewo i prawo rozważamy tak jak na osi liczbowej. Niech a_k będzie liczbą krówek w wiaderku o numerze k. Wówczas wartość wyrażenia $\sum_k a_k \cdot 2^k$ się nie zmienia.