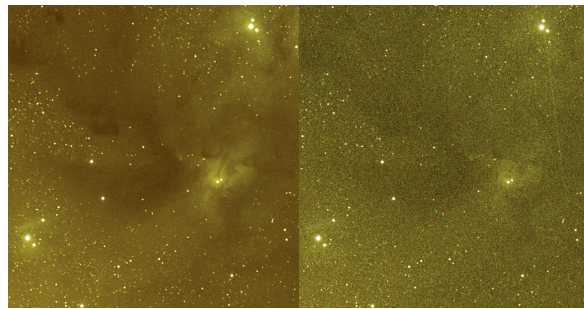


Jednym z najczęstszych zakłóceń w zdjęciach nocnego nieba są ślady pozostawione przez przelatujące satelity, samoloty bądź meteory. Są to zakłócenia, wobec których średnia algebraiczna jest bezsilna. Aby je usunąć stosowane są algorytmy: Percentile Clipping, Sigma Clipping, Median Sigma Clipping, Winsorized Sigma Clipping, Median MAD Clipping, Linear Fit Clipping, Generalized Extreme Studentized Deviate Test.

5. W dalszej kolejności następuje pozycjonowanie wszystkich klatek sygnału w oparciu o układ gwiazd z dokładnością do jednego piksela – uwzględniając przy tym korektę dystorsji zdjęcia. Ciekawostką może być fakt, że możliwe jest także pozycjonowanie klatek z dokładnością mniejszą niż rozmiar jednego piksela. Takie pozycjonowanie stosuje się m.in. dla zdjęć z teleskopu Hubble'a, wykorzystując algorytm Drizzle.
6. I wreszcie scalenie materiału, na które składa się normalizacja klatek sygnału (lokalna lub globalna), odrzucenie wcześniej ustalonych wartości skrajnych sygnału (np. tzw. *hot pixels* i *cold pixels*), a w końcu uśrednienie sygnału ze skalibrowanych klatek sygnału i wygenerowanie obrazu wynikowego.

Uzyskany w wyniku tego dość ogólnie opisanego procesu obraz końcowy ma znacznie wytłumione zakłócenia wprowadzone przez nasz zestaw fotograficzny (szum wprowadzony przez elektronikę lub tor optyczny), usuniętą większość zakłóceń o losowym charakterze, poprawioną rozpiętość tonalną oraz zwiększony stosunek sygnału do szumu (patrz zdjęcie poniżej). Ale to nie koniec! Nasz obraz jest wciąż daleki od ideału i nadal skażony światłem emitowanym lub rozproszonym przez atmosferę. W następnym artykule opiszę, jak sprawić, aby nasze zdjęcie stało się pięknym.



Porównanie efektu stackowania 40 klatek (po lewej) w odniesieniu do tego samego fragmentu pojedynczej klatki (po prawej)

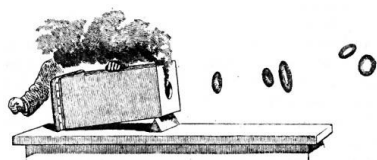
## Leonardo da Vinci i hydrodynamika

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*

\*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Studia wody. Na dwóch rysunkach przedstawiony jest przepływ wody przez płaską przeszkodę



W eksperymencie Taita powstają stabilne struktury pierścieni wirowych. Peter Tait, *Lectures on Some Recent Advances in Physical Science*, MacMillan & Co., Londyn 1876

Hydrodynamika to nauka o dynamice płynów. Zachowane pisma Leonarda da Vinci (1452–1519) zawierają kilkaset stron jej poświęconych. Są to części traktatów, rozbudowane schematy pomysłów hydraulicznych i hydrologicznych oraz niezliczone rysunki i notatki.

W holistycznej wizji nauki Leonarda dotyczącej form żywych woda jest elementem centralnym, *środowiskiem i nosicielem życia*, zarówno w makrokosmosie – środowisku żyjącej Ziemi, jak i w mikrokosmosie – w ciałach zwierząt i roślin. Bez wody nie ma życia. Woda występuje także w kilku obrazach religijnych tego wszechstronnie utalentowanego badacza – jako nosicielka życia w sensie symbolicznym, jako medium przekazujące sakrament chrztu. Da Vinci dostrzegał niebanalne analogie pomiędzy strukturami układu hydrologicznego Ziemi, układu krwionośnego i komórkami przewodzącymi roślin, wskazując na aspekty funkcyjne i cechy charakterystyczne dynamiki.

Wszystkie żywe struktury posiadają cechy samej wody, takie jak płynność, różnorodność, adaptacyjność i stabilność – zachowanie formy przy jednoczesnym ciągłym strumieniu przepływającej materii. Prowadząc badania hydrodynamiczne, Leonardo chciał zrozumieć naturę i siłę prokreacyjną samego życia. Jego badania nad wirami i strukturami spiralnymi, łączącymi w sobie zmienność i zarazem stabilność, przywodzą na myśl XIX-wieczne badania lorda Kelvina i Petera Taita nad pierścieniami wirowymi, które w ich wirowej teorii atomu miały stanowić podstawową strukturę materii. Leonardo da Vinci



### Rozwiązanie zadania M 1778.

Oznaczmy

$$n = \text{NWD}(a! + 1, b! + 1, c! + 1, d! + 1).$$

Wtedy  $n \mid (b! + 1) - (a! + 1)$ , więc

$$n \mid (b! - a!) = a![(a + 1) \cdot \dots \cdot b - 1].$$

Jednakże  $\text{NWD}(a! + 1, a!) = 1$ , stąd

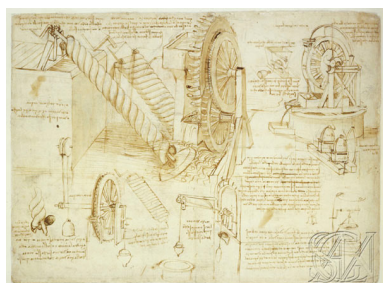
$$n \mid (a + 1) \cdot \dots \cdot b - 1. \text{ Wobec tego}$$

$$n \leq (a + 1) \cdot \dots \cdot b - 1 < b^{b-a} < d^{b-a}.$$

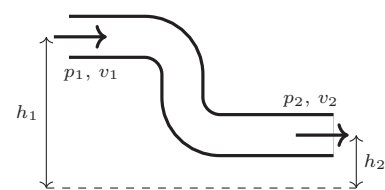
Podobnie  $n < d^{c-b}$  oraz  $n < d^{d-c}$ . Zatem

$$n^3 = n \cdot n \cdot n < d^{b-a} \cdot d^{c-b} \cdot d^{d-c} = d^{d-a},$$

co oczywiście daje tęzę zadania.

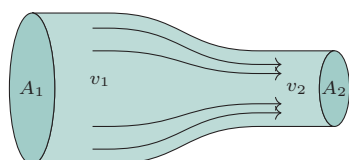


Urządzenia Leonarda da Vinci służące do podnoszenia wody



Ilustracja prawa Bernoulliego:

$$p_2 - p_1 = \rho g \cdot (h_1 - h_2)$$



Ilustracja prawa ciągłości:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

odkrył ruch wirowy na długo przed Kartezjuszem (XVII wiek), a jego dynamikę, w swoich badaniach nad turbulencją – przed Helmholtzem (ok. 1858 r.).

Pozostając częściowo pod wpływem nauki Arystotelesa, w swoich badaniach hydrodynamicznych prowadzonych w latach 1485–1515 Leonardo wybiegał jednocześnie daleko wprzód, o kilkadziesiąt lat wyprzedzając obserwacje, eksperymenty i odkrycia późniejszych uczonych, którym je przypisano. Należą do nich: odkrycie *zasady ciągłości* (przed Benedetto Castellem, ok. 1628 r.), *lepkości przepływu* (przed Izaakiem Newtonem, ok. 1687 r.), *uniwersalności przepływu* (przed Danielem Bernoullim, ok. 1738 r.), *dekompozycji turbulencji* (przed Osbornem Reynoldsem, ok. 1895 r.), *kaskady Richardsona* (przed Lewisem Richardsonem, ok. 1922 r.), własności *dynamiki wirów* (przed Hermannem von Helmholtzem, ok. 1858 r.) i metody *wizualizacji przepływu* (przed Osbornem Reynoldsem, ok. 1883 r.).

W artykule *Leonardo da Vinci i topologia* [G. Łukaszewicz,  $\Delta_{22}^4$ ] przedstawiono hydrodynamiczne motywacje Leonarda dla jego badań topologicznych. Pokrewną do hydrodynamiki dziedziną jego działalności była hydrologia – zajmującą się wodą dział geografii. Osiągnięcia genialnego uczonego w tej dziedzinie są tak znaczne, że hydrologi uważają go za jednego z jej ojców założycieli. W tym artykule opowiemy o wybranych kierunkach badań hydrodynamicznych Leonarda da Vinci, w tym o jego nowatorskich eksperymentach i teoriach.

**Zasada uniwersalności.** Własność uniwersalności procesów ewolucyjnych to podobieństwo pewnych cech dla całej ich klasy. Poszukując praw ogólnych dla ruchu i transformacji płynów, Leonardo założył, że pewne podstawowe własności są wspólne dla nich wszystkich. Aby to potwierdzić, eksperymentował nie tylko z wodą, ale także z krwią, winem, olejem oraz z materiałami sypkimi, piaskiem i ziarnami. Zdał sobie sprawę, że pewne własności przepływu wody, takie jak lepkość czy lokalny ruch wirowy, można wywnioskować i dokładniej zbadać, obserwując ruch materiałów sypkich, prostszych dla obserwacji, bowiem widoczne są wtedy poszczególne cząstki poruszającej się materii. Mamy tu do czynienia z nowoczesnym, współczesnym podejściem do badania złożonych zjawisk przy pomocy prostszych modeli. Tym rodzajem rozumowania Leonardo wyprzedzał znacznie swoje czasy. Jego badania były przy tym głównie jakościowe. Na złożone obliczenia związane z procesami dynamicznymi było jeszcze za wcześnie, wszak równania różniczkowe zaczęły raczkować dopiero w XVII wieku. Pierwszą próbę zastosowania ogólnego newtonowskiego prawa dynamiki do ruchu płynów podjął Daniel Bernoulli w swojej *Hydrodynamice* w 1738 roku. Podał on proste, fundamentalne prawo szeroko używane dziś w najrozmaitszych badaniach przepływowych, od inżynierii po medycynę. W swojej najprostszej postaci prawo to wyraża formuła

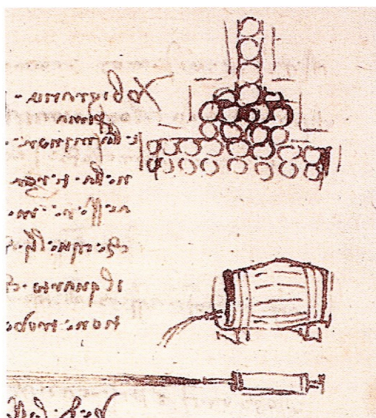
$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho gh = \text{constant},$$

mówiąca, że suma ciśnienia statycznego, dynamicznego i hydrostatycznego jest stała. Jest ona prawdziwa dla dużego spektrum cieczy i przepływów o różnych własnościach. W przypadku bezruchu (prędkość  $V = 0$ ) otrzymujemy znane ze szkoły prawo mówiące, że różnica ciśnienia hydrostatycznego na dole i na górze słupa wody jest równa wysokości słupa wody pomnożonej przez gęstość wody i stałą przyspieszenia ziemskiego:  $p_2 - p_1 = \rho g(h_1 - h_2)$ .

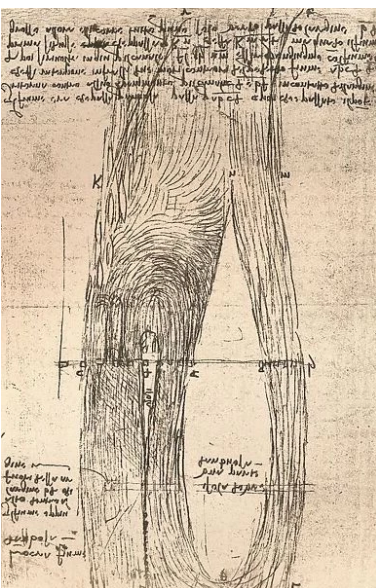
Przedstawiona poniżej zasada ciągłości posiada te same cechy co zasada Bernoulliego – będąc prostym, ilościowym prawem mającym liczne zastosowania, ma fundamentalny charakter uniwersalności.

**Zasada ciągłości.** Własność ciągłości przepływu wody (lub dowolnej innej cieczy nieściśliwej) mówi, że *w danej chwili do dowolnego wyróżnionego obszaru przepływu wpływa ta sama ilość wody, co z niego wypływa*. Została ona odkryta przez Leonarda da Vinci, który w końcu XV wieku pracował dla Francesco Sforzy w Mediolanie, także jako nadzorca hydraulicznych projektów inżynierskich.

Problem mierzenia ilości przepływającej wody w licznych rzekach i kanałach nawadniających pola uprawne Niziny Lombardzkiej był ważną kwestią



Równanie ciągłości wyjaśnione na przykładzie grupy maszerujących zmuszonych do przejścia przez dwa wąskie gardła (rysunek u góry)



Rysunek Leonarda da Vinci przedstawiający złożony obraz przepływu w rzece Loarze w Amboise

techniczną i administracyjną. Wtedy, i jeszcze znacznie później, ilość przepływającej wody w kanale szacowano polem jego przekroju, nie biorąc pod uwagę prędkości płynącej wody.

Leonardo powiązał ilość przepływającej wody z przekrojem rzeki i z jej prędkością. W „Kodeksie Atlantyckim” pisze:

*Rzeka transportuje na każdym przekroju swojej długości w tym samym czasie taką samą ilość wody.*

Jest to właśnie prawo ciągłości, w tym szczególnym przypadku wyrażane wzorem  $A_1v_1 = A_2v_2$ , w którym  $A_1$  i  $A_2$  to pola przekrojów rzeki w wybranych miejscach, a  $v_1$  i  $v_2$  to prędkości wody na tych przekrojach. Wynika z niego, jak pisze w „Manuskrypcie A”, że:

*Rzeka o jednakowej głębokości będzie miała szybszy przepływ na mniejszej szerokości niż na większej tyle razy, ile razy większa szerokość przewyższa mniejszą.*

Aby klarownie zilustrować zasadę ciągłości, uczoney posłużył się uproszczonym modelem zwartego regimentu wojska maszerującego przez miasto:

*Przypuśćmy, że mężczyźni wypełniają te aleje swoimi ciałami i że muszą maszerować w sposób ciągły. Kiedy mężczyźni w najszerszym miejscu robią jeden krok, (...) ci na pośredniej szerokości zrobią dwa, a ci na trzecim miejscu, o szerokości jednej czwartej poprzedniej, zrobią osiem kroków w tym samym czasie. I znajdziesz tę proporcję we wszystkich ruchach, które przechodzą przez miejsca o różnej szerokości.*

Podobnie jak w przypadku zasady uniwersalności, Leonardo posłużył się tu prostszym modelem, pozwalającym zarówno intuicyjnie wnikać w istotę zagadnienia, jak i dostrzec relacje ilościowe. Zasadę ciągłości odkrył ponownie Benedetto Castelli i w 1629 roku opublikował w poświęconej hydraulice książce pt. *O pomiarze bieżącej wody*.

**Tarcie i lepkość.** Leonardo da Vinci jako pierwszy systematycznie badał uniwersalne w przyrodzie zjawisko tarcia. Bardzo dokładnie i wszechstronnie analizował jego rolę w konstrukcjach inżynierskich, a także w badaniach ruchu wody.

W hydrodynamice rozróżniamy dwa podstawowe rodzaje tarcia: tarcie wewnętrzne między cząsteczkami poruszającego się płynu, które nazywamy lepkością płynu, oraz tarcie między płynem a ograniczającą go powierzchnią, czyli brzegiem. Leonardo opisywał wpływ obu jego rodzajów na ruch płynu. Lepkość określał jako spójność wody samej w sobie. Rozumiał, że powoduje ona tarcie między cieczą i brzegiem obszaru przepływu oraz między sąsiednimi warstwami wody płynącymi z różnymi prędkościami. Obserwował i opisywał wpływ tych sił, które nazywamy dziś naprężeniami ścinającymi, na ruch wody. W „Manuskrypcie H” pisze, że *dno zapewnia większy opór, dlatego woda porusza się bardziej na powierzchni niż przy dnie*, a w „Manuskrypcie I”, że *rzeki, gdy są proste, płyną z dużo większym impetem w środku swej szerokości niż przy brzegu*.

Zachowanie się płynu przy brzegu obszaru jego przepływu jest niezwykle złożonym zjawiskiem. Mimo rozmaitych prób jego modelowania, podjętych dopiero w XX wieku, problem znalezienia analitycznego opisu tego przepływu pozostaje problemem otwartym. Źródłem trudności jest związek ruchu płynu w warstwie przyściennej z jeszcze bardziej nieuchwytnym analitycznie, choć powszechnie obserwowanym, zjawiskiem turbulencji. Richard Feynman w swoich wykładach z fizyki (1963) napisał: *Turbulencja jest najważniejszym nierozwiązanym problemem fizyki klasycznej* – i takim pozostaje do dziś.

Leonardo opisał i przeanalizował rozmaite aspekty turbulentnego, czyli burzliwego, ruchu wody. Jednym z nich jest obecność wirów zajmujących centralne miejsce w teorii turbulencji.



#### Rozwiązanie zadania M 1777.

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $a, b \geq 0$  oraz  $c \leq 0$ . Ponieważ  $f$  jest funkcją nieparzystą, mamy  $f(0) = 0$  oraz  $f(a + b) = -f(c)$ . Dodatkowo z monotoniczności  $f(a + b) \geq f(a) \geq 0$  oraz  $f(b) \geq 0$  i dlatego  $f(a + b)f(b) \geq f(a)f(b)$ , czyli  $f(a)f(b) + f(b)f(c) \leq 0$ . Dodając do tego nierówność  $f(c)f(a) \leq 0$  (wynikającą z  $f(c) \leq 0$ ), otrzymamy tezę zadania.

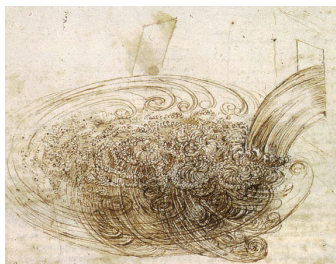


Interakcje pomiędzy wodą, korytem rzeki i przeszkodami



Po lewej: szkice Leonarda da Vinci przedstawiające eksperymentalne zbiorniki do badania fal i prądów w wodzie.

Po prawej: Szkice przedstawiające jego teorie na temat wirów w zastawkach serca



Rysunek wiru wodnego

**Wiry wodne.** Leonardo da Vinci nigdy nie zrealizował swojego śmiałego zamiaru napisania *Traktatu o wodzie*, w którym zamierzał podać precyzyjny i kompletny opis ruchu wody. Takie przedsięwzięcie jest niemożliwe do zrealizowania nawet dziś. Zafascynowany wodą badacz wykonał setki bardzo wnikliwych ilustracji jej ruchu w różnych sytuacjach. Prace te ze względu na wielką złożoność ruchu wody są dwojakiego rodzaju. Pierwsze wyrażają bezpośrednie obserwacje i grają rolę dzisiejszej fotografii, drugie to schematyczne diagramy, wyrażające bardziej prawa ruchu niż jego dokładny obraz. Co nie jest charakterystyczne dla całej pozostałej twórczości naukowej Leonarda, w badaniach hydrodynamicznych rysunki stanowią często tylko uzupełnienie tekstu. Stwierdzamy tu problem braku właściwego języka opisu wynikający z ogromnej złożoności przedmiotu badań. Podobne zjawisko można też zauważyć w *Principiach* Newtona, gdzie np. w części poświęconej badaniu ruchu księżyca Newton napotyka wymykające się opisowi analitycznemu zagadnienie trzech ciał, i z konieczności ucieka się do nieprecyzyjnego opisu słownego.

Jak wspomnieliśmy wyżej, Leonarda szczególnie fascynowały wiry, jako struktury łączące w sobie zmienność i stabilność, cechy charakterystyczne wszystkie formy życia. Zamierzał podać pełną klasyfikację wirów. Píše o tych zamierzeniach w „Manuskrypcie F”:

*O wirach na powierzchni i o tych, które powstają na różnych głębokościach wody; o tych, które zajmują całą tę głębokość, ruchomych i stabilnych; o długich i okrągłych; o tych, które okresowo zmieniają swój ruch, i o tych, które się dzielą; o tych, które przekształcają się w wiry, z którymi się łączą; i o tych, które mieszają się ze spadającą i odbijającą się wodą i wprawiają ją w ruch obrotowy.*

Leonardo opisał, jak powstają wiry w różnych sytuacjach, nazwał ich różne rodzaje i jako pierwszy uczony badał ich strukturę. Jedną z przyczyn tworzenia się wirów jest napotkanie przez przepływ przeszkody. W „Manuskrypcie A” pisze:

*Prąd poruszającej się wody stara się utrzymać swój bieg zgodnie z siłą, która go spowodowała, a kiedy napotka przeciwną przeszkodę, kończy rozpoczęty kurs okrężnymi i wirującymi ruchami.*

Opierając się na obserwacjach, zidentyfikował trzy rodzaje wirów: te o poziomej powierzchni, te z wypukłymi środkami i te z obniżonymi środkami. Powiązał też miarę zagłębienia środka wiru z prędkością poruszającej się wody.

W „Manuskrypcie F” pisze:

*Wir z głębszym zagłębieniem będzie tym, który powstaje w wodzie o szybszym ruchu; i ten wir będzie miał mniejsze zagłębienie, jeśli jest wytwarzany w głębszej wodzie, która nie ma takiego samego ruchu, ale jest wolniejsza.*

Leonardo rozróżniał też wiry wolnoobrotowe, których prędkość kątowna obrotu jest praktycznie stała, od tych, których prędkość kątowna obrotu wzrasta wraz ze zmniejszaniem się odległości od środka wiru. W „Kodeksie Atlantyckim” pisze:

*Spiralny lub wirowy ruch każdej cieczy jest tym szybszy, im bliżej środka jej obrotu. Ten fakt, na który zwracamy uwagę, jest wart odnotowania, ponieważ ruch kołowy koła jest tym wolniejszy, im bliżej środka obracającego się obiektu.*

Na pełniejszy opis struktury i dynamiki wirów musiano czekać następne 350 lat, kiedy to Herman Helmholtz podjął badania Leonarda i podał matematyczny opis niektórych z nich. W tym krótkim artykule mogliśmy przedstawić tylko niewielki fragment badań Leonarda da Vinci w zakresie hydrodynamiki, gdyż, jak już wspomnieliśmy, jego zachowane pisma zawierają kilkaset stron poświęconych tej dziedzinie.

## Bibliografia

- F. Capra, *Learning from Leonardo. Decoding the Notebooks of a Genius*, San Francisco, CA, 2014.  
 A. Corsini, *Modeling (understanding and controlling) turbulent flows: the heritage of Leonardo da Vinci in modern computational fluid dynamics*, Conference on Modelling Fluid

- Flow (CMFF'18) The 17th International Conference on Fluid Flow Technologies Budapest, Hungary, September 4-7, 2018.  
 I. Marusic, S. Broomhall, *Leonardo da Vinci and Fluid Mechanics*, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 53, 1–25, 2021.  
 G. Łukaszewicz, *Leonardo da Vinci i topologia* ( $\Delta_{22}^4$ ), *Hydrodynamika a hydraulika* ( $\Delta_{17}^8$ ), *Problemy z równaniami hydrodynamiki* ( $\Delta_{22}^5$ , razem z K. Mizerskim).