Klub 44 M

$\sqrt[\otimes]{\int!}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2024

Zadania z matematyki nr 879, 880

Redaguje Marcin E. KUCZMA

879. Funkcje f i g, o wartościach rzeczywistych, są określone na przedziale $[a,b]$; funkcja g jest rosnąca; $f(a)>0>f(b)$. Wiadomo ponadto, że różnica $f-g$ jest funkcją ciągłą. Udowodnić, że w pewnym punkcie przedziału (a,b) funkcja f przyjmuje wartość 0.

880. Rozstrzygnąć, czy zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych $\mathbf{Q}_+$ daje się przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów rozłącznych A, B tak, by miały miejsce następujące implikacje (dla $x,y\in\mathbf{Q}_+$):
- jeśli $xy=1$, to $x\in A,\ y\in A$ lub $x\in B,\ y\in B$;
- jeśli $|x-y|=1$, to $x\in A,\ y\in B$ lub $x\in B,\ y\in A$.

Zadanie 880 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 865 ($WT=1{,}27$) i 866 ($WT=2{,}68$) z numeru 9/2023

Radosław Kujawa	Wrocław	43,57
Paweł Najman	Kraków	43,16
Marek Spychała	Warszawa	41,47
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Janusz Fiett	Warszawa	40,89
Jerzy Cisło	Wrocław	38,97
Piotr Kumor	Olsztyn	37,94
Janusz Olszewski	Warszawa	37,56
Paweł Kubit	Kraków	36,11
Piotr Wiśniewski	Warszawa	33,64

Rozwiązania zadań z numeru 12/2023

Przypominamy treść zadań:

871. Dana jest liczba całkowita parzysta $n>0$.
(**a**) Dowieść, że w przedziale $[n+1, 2n+1]$ zawiera się n-elementowy zbiór liczb całkowitych M taki, że żaden jego element nie jest dzielnikiem sumy wszystkich liczb zbioru M.
(**b**) Wyjaśnić, czy zawsze istnieją (w tym przedziale) co najmniej dwa różne zbiory n-elementowe o powyższych własnościach.

872. Wielomiany $W_1,\ldots,W_m$ (jednej zmiennej), stopni dodatnich, mają dodatnie współczynniki całkowite. Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n>0$ wartości $W_1(n),\ldots,W_m(n)$ są jednocześnie liczbami złożonymi.

871. Niech $M^*=\{n+1,n+2,\ldots,2n+1\}$ i niech S będzie sumą elementów zbioru M^*. Niech $M_k=M^*\setminus\{k\}$ (dla $k\in M^*$). Będziemy mówili, że liczba $k\in M^*$ jest *ciekawa*, gdy suma elementów zbioru M_k (czyli liczba $S-k$) nie dzieli się przez żaden z nich.

(**a**) Należy wykazać, że co najmniej jedna liczba $k\in M^*$ jest ciekawa. Przyjmijmy dalsze oznaczenie:
$$N_k=\{i\in M^*\colon\ i\,|\,S-k\}.$$
Odnotujmy proste własności:
$W1$. Jeśli $N_k=\emptyset$, to liczba k jest ciekawa.
$W2$. Jeśli $k|S$, to $k\in N_k$ (więc $N_k\neq\emptyset$).
$W3$. Jeśli $k|S$ oraz $|N_k|=1$, to liczba k jest ciekawa.
$W4$. Zbiory N_k są parami rozłączne.
Własności $W1$, $W2$, $W3$ są oczywiste. Dowód $W4$: gdyby $i_0\in N_k\cap N_l$ $(k>l)$, to $i_0|k-l$; a to niemożliwe, bo $i_0\geqslant n+1$, zaś $k-l\leqslant(2n+1)-(n+1)=n$. Z własności $W4$ wynika, że
$$(*)\qquad \sum_{k\in M^*}|N_k|\leqslant\big|M^*\big|=n+1.$$
Suma $(*)$ ma $n+1$ składników. Jeżeli któryś z nich jest zerem, to jest to już teza (**a**) (własność $W1$). Jeżeli nie, to wszystkie są równe 1. Prosty rachunek pokazuje, że $S=cd$, gdzie $c=n+1$, $d=\frac{3}{2}n+1$ $(c,d\in M^*)$; więc i teraz dostajemy tezę (**a**), bo (dzięki $W3$) liczba c jest ciekawa (d zresztą też).

(**b**) Tu też odpowiedź jest twierdząca: wykażemy, że w zbiorze M^* są co najmniej dwie liczby ciekawe. Jeśli wśród składników sumy $(*)$ są co najmniej dwa zera, to gotowe ($W1$). Jeśli wszystkie są dodatnie, to są jedynkami i znów (wobec $W3$) liczby c i d są obie ciekawe.

Pozostaje przypadek, gdy wśród składników sumy $(*)$ jest dokładnie jedno zero; niech np. $|N_e|=0$: liczba e jest więc ciekawa ($W1$); $e\neq c,d$, bo $N_c,N_d\neq\emptyset$ ($W2$). Pozostałe składniki sumy $(*)$ to albo same jedynki, albo dwójka i poza nią jedynki. Co najmniej jedna z liczb c,d musi być wśród jedynek – jest więc ciekawa ($W3$); dowód zakończony.

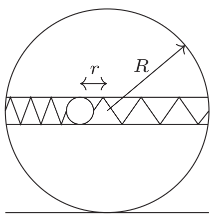
872. Oznaczmy $W_j(1)=c_j$. Weźmy dowolną liczbę n postaci $n=kc_1\ldots c_m+1$ $(k\in\mathbf{N})$. Ustalmy $j\in\{1,\ldots,m\}$. Różnica $W_j(n)-W_j(1)$ dzieli się przez $n-1$, więc i przez c_j. Skoro $c_j=W_j(1)$, znaczy to, że $W_j(n)$ dzieli się przez c_j. Przy tym dla dostatecznie dużych n wartość $W_j(n)$ przekracza c_j; jest więc liczbą złożoną. Tak jest dla każdego numeru j, skąd wniosek, że dla dostatecznie dużych n (rozważanej postaci) wszystkie wartości $W_1(n),\ldots,W_m(n)$ są liczbami złożonymi.

Rozwiązanie zadania M 1779.
Połóżmy wielokąt tak, aby wszystkie jego boki były poziome lub pionowe. Wierzchołki wielokąta można podzielić na 4 typy: ⌜, ⌝, ⌞, ⌟. Oznaczmy liczbę wierzchołków każdego z typów przez S_1, S_2, S_3, S_4.

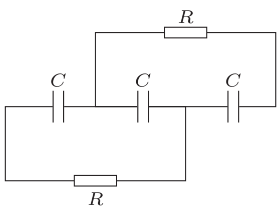
Bez utraty ogólności rozważmy wierzchołek A typu 2. Wtedy wierzchołki, które są z nim wrogie, są typu 1 lub 4, zatem ich liczba to S_1+S_4. Rozważmy dowolny poziomy bok. Jego lewy koniec może być typu 1 lub 3, natomiast prawy typu 2 lub 4. Każdy wierzchołek jest końcem dokładnie jednego poziomego boku. Ponieważ liczba lewych końców boków poziomych jest równa liczbie wszystkich prawych końców boków poziomych, otrzymujemy równość $S_1+S_3=S_2+S_4$. Podobne rozumowanie z bokami pionowymi daje równość $S_1+S_2=S_3+S_4$. Łącząc obydwie równości, dostajemy, że $2S_1=2S_4$, czyli $S_1+S_4=2S_4$ jest liczbą parzystą.

Klub 44 F

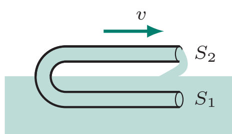
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2024



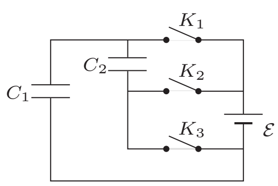
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 762 ($WT = 3{,}01$), 763 ($WT = 2{,}46$) z numeru 9/2023

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–43,02
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–40,60
Jacek Konieczny	Poznań	38,28
Konrad Kapcia	Poznań	2–35,60
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1–32,41
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5–24,61
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–22,20
Paweł Kubit	Kraków	15,73
Jan Zambrzycki	Białystok	4–13,69

W rozwiązaniu zadania **762** w numerze styczniowym prawa strona równania wyrażającego zasadę zachowania energii powinna mieć postać: $3\sqrt{p_f^2c^2/9 + m^2c^4}$.

Zadania z fizyki nr 776, 777

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

776. Na poziomej powierzchni stoi jednorodna, cienka obręcz o masie M i promieniu R. Poziomą średnicę obręczy stanowi lekka, gładka rurka, wewnątrz której umieszczono kulkę o masie m przylegającą do rurki i połączoną z obręczą dwiema sprężynami o współczynnikach sprężystości k (rys. 1). Przytrzymując obręcz, kulkę odchylono w lewo o x, po czym układ pozostawiono samemu sobie. Znaleźć przyspieszenie środka obręczy w chwili początkowej, zakładając brak poślizgu obręczy.

777. Trzy jednakowe kondensatory o pojemnościach C połączono szeregowo, podłączono do źródła o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i po naładowaniu odłączono od baterii. Następnie do układu podłączono jednocześnie dwa oporniki o oporach R (rys. 2). Jaka ilość ciepła wydzieli się na każdym oporniku? Jakie natężenia mają prądy płynące przez oporniki w chwili, gdy napięcie na środkowym kondensatorze jest 10 razy mniejsze od siły elektromotorycznej baterii?

Rozwiązania zadań z numeru 12/2023

Przypominamy treść zadań:

768. Otwarta z dwóch stron rurka w kształcie litery U porusza się z prędkością v równolegle do powierzchni cieczy (rys. 3). Przekrój zanurzonej w cieczy dolnej części rurki wynosi S_1, a górnej, znajdującej się nad cieczą, jest równy S_2. Jaka siła zewnętrzna działa na rurkę w kierunku poziomym? Tarcie i powstawanie fal należy zaniedbać. Gęstość cieczy wynosi ρ.

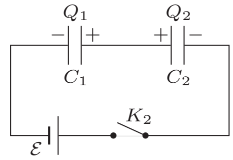
769. W układzie przedstawionym na rysunku 4 na początku wszystkie klucze są otwarte, a kondensatory o pojemnościach C_1 i C_2 nienaładowane. Klucze K_1 i K_3 zostały zamknięte i po ustaleniu równowagi otwarte, po czym zamknięty został klucz K_2. Znaleźć napięcie końcowe na kondensatorze C_1. Siła elektromotoryczna baterii wynosi $\mathcal{E}$.

768. W inercjalnym układzie odniesienia związanym z rurką, ciecz w dolnej części rurki porusza się z prędkością v. W czasie Δt do rurki wpływa porcja cieczy o masie $m = \rho S_1 v \Delta t$ i pędzie $p_1 = mv = \rho S_1 v^2 \Delta t$. W tym samym czasie porcja o takiej samej masie wycieka z górnej części rurki z prędkością $u = vS_1/S_2$, a jej pęd $p_2 = \rho S_2 u^2 \Delta t = \rho v^2 {S_1}^2 \Delta t/S_2$. Wektor zmiany pędu cieczy w rurce w czasie Δt ma wartość $\Delta p = mv - (-mu) = \rho S_1\left(1 + S_1/S_2\right) v^2 \Delta t$ i skierowany jest w prawo. Ciecz działa na rurkę w lewo, a szukana siła zewnętrzna działająca na rurkę nie zależy od wyboru inercjalnego układu odniesienia, skierowana jest w prawo i ma wartość

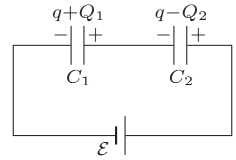
$$F = \Delta p/\Delta t = \rho S_1\left(1 + S_1/S_2\right) v^2.$$

769. Po zamknięciu kluczy K_1 i K_3 kondensatory są połączone równolegle z baterią, a ładunki na nich to $Q_1 = C_1\varepsilon$ i $Q_2 = C_2\varepsilon$. Sytuację przed zamknięciem klucza K_2 przedstawia rysunek 5. Po zamknięciu klucza K_2 do prawej okładki kondensatora C_2 dopływa ładunek q, z lewej okładki kondensatora C_1 odpływa taki sam ładunek. Całkowity ładunek na wewnętrznych okładkach pozostaje niezmieniony (rys. 6). Z drugiego prawa Kirchhoffa mamy: $\varepsilon = (Q_2 - q)/C_2 - (Q_1 + q)/C_1$, stąd $q = C_1C_2\varepsilon/(C_1 + C_2)$. Napięcie końcowe na kondensatorze C_1 wynosi:

$$U = (Q_1 + q)/C_1 = \varepsilon\left(C_1 + 2C_2\right)/(C_1 + C_2).$$



Rys. 5



Rys. 6

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.