Twierdzenie Motzkina

*Sławomir DINEW**

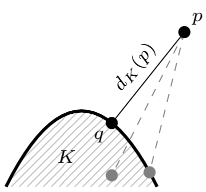
* Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Jedną z największych różnic pomiędzy matematykami współczesnymi a tymi *sprzed stuleci* jest wąska specjalizacja tych pierwszych. Z biografii gigantów, takich jak Euler, Gauss czy Riemann, jasno wyłania się obraz matematyków *wszechstronnych*, zajmujących się wszystkimi dziedzinami ówczesnej *królowej nauk*. Ich następcy, oczywiście z pewnymi chwalebnymi (lecz jakże rzadkimi) wyjątkami, są tak wąsko wyspecjalizowani, że często nie potrafią zrozumieć wyników swoich kolegów z innych dziedzin.

Częściowo z tego powodu w matematyce współczesnej bardzo poczesne miejsce zajmują teorie, w których wykorzystuje się narzędzia z różnych dziedzin. Przykładem znanym ze szkoły są *funkcje wypukłe*, które można scharakteryzować geometrycznie, ale także, zakładając odpowiednią regularność, w sposób czysto analityczny – *druga pochodna* takiej funkcji musi być wszędzie nieujemna.

Geometryczna charakteryzacja funkcji wypukłych jest prosta: zbiór *nad* ich wykresem jest wypukły. Zbiór natomiast nazywamy wypukłym, jeśli wraz z każdą parą swoich punktów p, q zawiera cały odcinek łączący $[p, q]$.

W tekście tym przedstawione zostanie twierdzenie dotyczące tak zwanej *funkcji odległości*, które także wiąże wypukłość z pewnymi faktami z analizy matematycznej. Tym razem jednak głównym aktorem będzie *pierwsza pochodna* zamiast drugiej. Oto i *główne danie* w menu:



Rys. 1. Punkt q jest najbliżej p spośród wszystkich punktów zbioru K

Twierdzenie (Motzkina). *Niech K będzie domkniętym podzbiorem płaszczyzny, a d_K funkcją mierzącą odległość od zbioru K:*

$$d_K(p) = \min\{\|p - q\| \mid q \in K\} \qquad \textit{(zob. rys. 1).}$$

Wówczas zbiór K jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja odległości d_K jest różniczkowalna na dopełnieniu K, czyli na zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus K$.

Symbolem $\|(x_1, x_2)\|$ oznaczamy wielkość $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, dzięki czemu $\|p - q\|$ jest długością odcinka łączącego p i q.

Jest to dość niezwykły fakt wiążący geometrię K z regularnością d_K. Otóż *na oko* wydawać się może, że za regularność funkcji d_K powinna odpowiadać gładkość brzegu K, a nie geometryczny kształt. Zanim jednak zagłębimy się w meandry tegoż twierdzenia, starannie wyjaśnijmy wszystkie pojęcia, aby nie było nieporozumień. Polecam również lekturę artykułu Michała Miśkiewicza z Δ^2_{24} pt. *Babo, babo, udaj się*.

Aby uniknąć rozważań filozoficznych nad zbiorami pustymi, zakładamy także, że zbiór K i jego dopełnienie są niepuste.

Na początek przypomnijmy, czym jest domkniętość: intuicyjnie zbiory domknięte to te, które zawierają swój brzeg (pełna definicja widnieje obok). Do czego przyda nam się to pojęcie? Zobaczymy za chwilę.

Definicja. Zbiór K punktów na płaszczyźnie nazywamy **zbiorem domkniętym**, jeżeli posiada on następującą własność: dla dowolnego punktu p z dopełnienia K istnieje promień $r > 0$ oraz koło $B_r(p)$ (bez okręgu na brzegu) w całości zawarte w tym dopełnieniu.

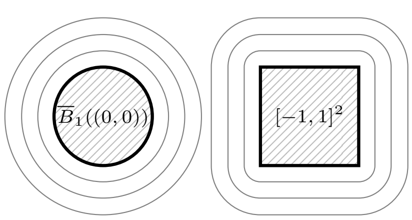
Wytrawny Czytelnik spostrzeże w definicji funkcji d_K pewną subtelność: czemu niby wartość *minimum* musiałaby istnieć, skoro bierzemy ją po zbiorze, który wcale skończony być nie musi? Otóż właśnie tu interweniuje (po raz pierwszy) domkniętość – jeżeli weźmiemy ciąg punktów q_j z K, które *prawie* realizują minimum i są coraz bliżej tego celu, to okaże się, że pewien podciąg punktów q_j będzie zbieżny do jakiegoś punktu $\hat{q} \in K$. Okazuje się, że $\hat{q}$ będzie realizować minimum! Szczegóły tego rozumowania pozostawiamy Ambitnym Czytelnikom jako ciekawe **ćwiczenie**.

Zbieżność $q_j \to \hat{q}$ oznacza, że obie współrzędne, traktowane jako ciągi liczbowe, są zbieżne.

Funkcję odległości definiuje się w miarę prosto, niestety gorzej jest z jej jawnym wyliczeniem. Na przykład dla koła domkniętego $\overline{B}_r((0,0))$ da się to zrobić stosunkowo łatwo i wzór wygląda następująco:

$$d_{\overline{B}_r((0,0))}(p) = \begin{cases} 0 & \text{dla } p \in \overline{B}_r((0,0)); \\ \|p\| - r & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ambitnemu Czytelnikowi pozostawiamy wyliczenie d_K dla ciekawszych geometrycznych obiektów, choćby kwadratu $[-1, 1]^2$, który wymaga już rozpatrzenia większej liczby przypadków (rys. 2).



Rys. 2. Poziomice funkcji d_K w przypadku, gdy K jest kołem jednostkowym $\overline{B}_1((0,0))$ i kwadratem $[-1,1]^2$

Musimy także przypomnieć pojęcie różniczkowalności dla funkcji wielu zmiennych. Niestety, znany Czytelnikowi wzór

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

nie da się zastosować, gdyż w przypadku wielu zmiennych parametr h byłby wektorem, zaś przez wektory dzielić nie wolno! Zmodyfikujmy więc nieco definicję:

Na płaszczyźnie problem dzielenia przez wektory można rozwiązać, traktując punkty jako liczby zespolone. W ten sposób uzyskalibyśmy definicję czegoś, co w matematyce nazywamy $\mathbb{C}$-różniczkowalnością. Ale to, jak mawiała Szeherezada, jest już temat na inne opowiadanie.

Definicja. Funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nazywamy różniczkowalną w punkcie $p = (p_1, p_2)$, jeżeli istnieją stałe a_1, a_2 takie, że

$$\lim_{h_1^2+h_2^2\to 0} \frac{|f((p_1+h_1, p_2+h_2)) - f((p_1,p_2)) - a_1h_1 - a_2h_2|}{\|h\|} = 0.$$

Funkcję nazywamy różniczkowalną na zbiorze U, jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie zbioru U. Stałe a_1, a_2 (oczywiście zależne od punktu p!) nazywamy pochodnymi cząstkowymi f w p i piszemy $a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)$, $a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)$.

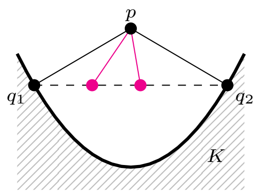
Czy jest jakaś intuicja stojąca za tą, trochę zagmatwaną, definicją? Czytelnik zechce zauważyć, że płaszczyzna $x_3 = f((p_1,p_2)) + a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2)$ w $\mathbb{R}^3$ będzie wtedy spełniać rolę *stycznej* do wykresu f w punkcie (p_1, p_2). Tak więc różniczkowalność w danym punkcie jest równoważna istnieniu płaszczyzny stycznej do wykresu.

Rozróżnienie punktów różniczkowalności i nieróżniczkowalności $d_{\overline{B}_r((0,0))}$ i $d_{[-1,1]^2}$ staje się jasne po spojrzeniu na rysunek 2.

Staranne wyliczenie dla $d_{\overline{B}_r((0,0))}$ pozwala stwierdzić, że na okręgu $\{x^2 + y^2 = r^2\}$ funkcja $d_{\overline{B}_r((0,0))}$ nie jest różniczkowalna, natomiast jest różniczkowalna w dopełnieniu. Jeżeli Czytelnik uporał się z wyznaczeniem $d_{[-1,1]^2}$, to zechce zauważyć, że brak gładkości na brzegu $[-1,1]^2$ nie wpływa, wbrew intuicji, na różniczkowalność $d_{[-1,1]^2}$ w dopełnieniu!

Jesteśmy już gotowi do wyjaśnienia sobie, dlaczego geometria i analiza wiążą się w twierdzeniu Motzkina. Jak to w matematyce często bywa, powiązanie dwóch pozornie nieskorelowanych faktów najczęściej odbywa się poprzez przeformułowanie ich w nieco innym języku. Zacznijmy od strony geometrycznej:

Lemat. Zbiór K na płaszczyźnie jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu p z dopełnienia istnieje dokładnie jeden punkt $q \in K$ najbliższy punktowi p.



Rys. 3. Jeśli punkty q_1, q_2 są w tej samej odległości od p, to każdy inny punkt odcinka $[q_1, q_2]$ jest bliżej. Gdy K jest wypukły, to zgodnie z definicją zawiera cały ten odcinek

Jedna część lematu jest trywialna: jeżeli $q_1 \neq q_2$ są dwoma punktami z K (jednocześnie) najbliższymi do pewnego punktu p, to odcinek $[q_1, q_2]$ miałby kłopoty z wciśnięciem się do (wypukłego!) zbioru K (rys. 3).

W drugą stronę jest ciekawiej. Przypuśćmy, że K nie jest wypukły, i weźmy dwa punkty $q_1, q_2 \in K$, dla których odcinek $[q_1, q_2]$ nie jest zawarty w K. Przecięcie odcinka $[q_1, q_2]$ z K może być skomplikowane, niemniej dzięki domkniętości K znajdziemy mniejszy odcinek $[l_1, l_2]$ zawarty w $[q_1, q_2]$, którego końce leżą w K, ale wnętrze jest już rozłączne z K.

– *To wtedy środek odcinka* (l_1, l_2) *da nam punkt* p *o dwóch najbliższych punktach do* K*!* – może wykrzyknąć Czytelnik. Niestety nie jest to do końca poprawne, bo punkt p może mieć najbliższego towarzysza z K gdzieś jeszcze bliżej...

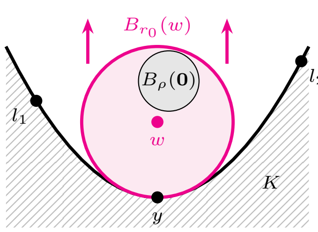
Kolejne ciekawe zadanie dla Czytelnika – dlaczego w rodzinie $\mathcal{F}$ istnieje koło o największym promieniu? Czy gdyby warunek $B_\rho((0,0)) \subset B_r((x,y))$ zastąpić prostszym warunkiem $(0,0) \in B_r((x,y))$, to coś by się zmieniło?

Znów pojawia się odwieczne pytanie: dlaczego przesunięcie $\overline{B}_{r_0}(w)$ jest rozłączne z K? Istotna tu jest samotność y oraz (który to już raz!) domkniętość K.

Bez straty ogólności umówmy się, że tak wybrany punkt p jest początkiem układu współrzędnych. Jako że należy on do dopełnienia (domkniętego) zbioru K, to pewna kula $\overline{B}_\rho((0,0))$ o środku w $p = (0,0)$ jest rozłączna z K. Rozpatrzmy teraz rodzinę kół

$$\mathcal{F} = \{B_r((x,y)) \mid B_\rho((0,0)) \subset B_r((x,y)),\ B_r((x,y)) \cap K = \emptyset\},$$

czyli rodzinę kół zawierających $B_\rho((0,0))$, ale nadal rozłącznych z K. Wiemy już, że jest ona niepusta. Wybierzmy teraz z rodziny $\mathcal{F}$ koło o największym promieniu – nazwijmy je $B_{r_0}(w)$ (rys. 4). Oczywiście na okręgu brzegowym koła $B_{r_0}(w)$ musi być pewien punkt $y \in K$. Wykażemy, że nie jest on jedyny. Przypuśćmy więc przeciwnie i przesuńmy koło $\overline{B}_{r_0}(w)$ o $\varepsilon > 0$ w kierunku $\overrightarrow{yw}$. Jeżeli ε dobierzemy wystarczająco małe, to przesunięte koło będzie rozłączne z K. Jeśli ponadto nadal zawiera $B_\rho((0,0))$, to wystarczy je teraz nadmuchać (delikatnie – bez obawy, że pęknie, może jednak dotknąć K...), i dostaniemy **sprzeczność** z maksymalnością r_0. W ogólnym przypadku to dodatkowe założenie może nie być spełnione, bo koło $\overline{B}_\rho((0,0))$ może dotykać brzegu $B_{r_0}(w)$ w jakimś punkcie z – wówczas wystarczy nieznacznie poprawić procedurę i kierunek przesuwania zmienić z $\overrightarrow{yw}$ na $\overrightarrow{yz}$. □

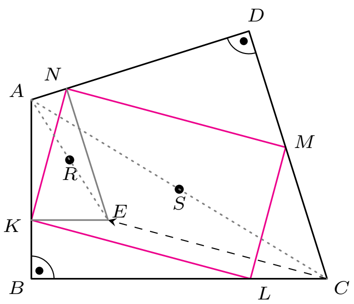


Rys. 4. Spośród kół zawierających $B_\rho((0,0))$ i rozłącznych z K to największe musi dotykać K w co najmniej dwóch punktach, inaczej dałoby się znaleźć większe

Powyższy dowód jest nieco zagmatwany – można go znaleźć na przykład w książce Hörmandera [H, Th. 2.1.30]. Być może Czytelnik znajdzie prostszy? W każdym razie mamy już opis geometryczny za pomocą odległości – pozostaje analiza. Poniższy lemat zakończy dowód twierdzenia Motzkina:

Rozwiązanie zadania M 1775. Przesuńmy równolegle trójkąt LMC o wektor $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MN}$, otrzymując trójkąt KNE. Ponieważ $CL \perp AK$, to $EK \perp AK$. Podobnie $EN \perp AN$. Zauważmy, że środek R odcinka AE jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $AKEN$, zatem R leży na symetralnej odcinka KN.

Niech S będzie środkiem przekątnej AC. Wtedy $RS \parallel EC \parallel KL$, co oznacza, że $RS \perp KN$, a zatem S również leży na symetralnej odcinka KN – co oczywiście implikuje tezę.



Lemat. Niech K będzie domkniętym podzbiorem płaszczyzny. Funkcja d_K jest różniczkowalna w punkcie $p \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ wtedy i tylko wtedy, gdy najbliższy do p punkt zbioru K jest wyznaczony jednoznacznie.

Dowód przeprowadzimy dla d_K^2 (czyli kwadratu odległości od K) zamiast dla d_K, gdyż bez kwadratu musielibyśmy się uporać z różniczkowaniem pierwiastków, co nie jest zbyt przyjemne. Na szczęście, dla funkcji dodatnich (a taka jest d_K na $\mathbb{R}^2 \setminus K$) różniczkowalność funkcji jest równoważna różniczkowalności jej kwadratu.

Także i tym razem mamy do wykazania dwie implikacje, przy czym jedna z nich jest bardzo łatwa. Przypuśćmy, że d_K jest funkcją różniczkowalną w punkcie p i niech q będzie najbliższym do p punktem z K. Chcemy wykazać, że q jest wyznaczony jednoznacznie. Do tego celu skonstruujmy funkcję

$$f(w) := \|w-q\|^2 - d_K^2(w) = (w_1-q_1)^2 + (w_2-q_2)^2 - d_K^2(w).$$

Jest to funkcja nieujemna (dlaczego?), a dodatkowo zeruje się ona w p, czyli ma w p minimum lokalne. Dla różniczkowalnych funkcji jednej zmiennej oznacza to zerowanie się pochodnej. A jak jest w przypadku dwóch (lub wielu) zmiennych? Przypomnijmy interpretację za pomocą płaszczyzny stycznej – w punkcie minimum płaszczyzna ta musi być pozioma, co w języku analizy oznacza, że pochodne cząstkowe są zerowe: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = 0$. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że te równości można zapisać następująco:

$$2(p_1-q_1) = \frac{\partial d_K^2}{\partial x_1}(p); \qquad 2(p_2-q_2) = \frac{\partial d_K^2}{\partial x_2}(p).$$

Te wzory jednoznacznie wyznaczają punkt $q = (q_1, q_2)$.

I tym razem w drugą stronę jest ciekawiej. Przyda nam się także trochę notacji: przez $\langle p, q\rangle$ oznaczmy iloczyn skalarny $p = (p_1, p_2)$ oraz $q = (q_1, q_2)$ (traktowanych jako wektory na płaszczyźnie), czyli $p_1q_1 + p_2q_2$; zauważmy, że $\|p\|^2 = \langle p, p\rangle$. Będziemy pisać, że jakieś wyrażenie $l(h)$ jest $o(h)$ (czytamy: o małe od h) jeżeli $\lim_{h_1^2+h_2^2 \to 0} \frac{l(h)}{\|h\|} = 0$.

Niech więc dla ustalonego $p \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ punkt q będzie jedynym najbliższym z K. Dowód pierwszej implikacji mówi nam, że jeśli funkcja d_K^2 jest różniczkowalna w p, to jej pochodnymi cząstkowymi są $2(p_1-q_1)$ i $2(p_2-q_2)$. Pozostaje nam więc podstawić te wartości do definicji i sprawdzić zbieżność odpowiedniego ilorazu. Przy użyciu naszej notacji zbieżność ta wyraża się następująco: wyrażenie $d_K^2(p+h) - d_K^2(p) - 2\langle p-q, h\rangle$ jest $o(h)$.

Do dzieła! Funkcja d_K jest ciągła, a więc jeżeli wektor h jest wystarczająco krótki, to punkt $p+h$ po pierwsze będzie w $\mathbb{R}^2 \setminus K$, a po drugie będzie istniał (niekoniecznie jedyny!) punkt $q_h \in K$ najbliższy do $p+h$, przy czym q_h musi zbiegać do q, gdy $h_1^2 + h_2^2 \to 0$ (wyjaśnienie tych szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie). Dopełniając do kwadratu, otrzymujemy:

W dowodzie korzystamy z tożsamości $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$, która sprawdza się do znanego ze szkoły wzoru $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Obok stosujemy ją dla $a = p-q$ i $b = h$, a w dalszej części dla $a = p - q_h$ i $b = h$.

$$d_K^2(p+h) - d_K^2(p) - 2\langle p-q, h\rangle = \|p+h-q_h\|^2 - \|p-q\|^2 - 2\langle p-q, h\rangle =$$
$$= \underbrace{\|h\|^2}_{o(h)} + \underbrace{\|p+h-q_h\|^2 - \|p+h-q\|^2}_{\leqslant 0} \leqslant o(h),$$

co jest połową naszej tezy. Powyżej $\|h\|^2$ jest „książkowym” przykładem wyrazu $o(h)$, natomiast nierówność $\|p+h-q\|^2 \geqslant \|p+h-q_h\|^2$ wynika z określenia punktu q_h. Z podobnych względów prawdziwa jest nierówność $\|p-q_h\|^2 \geqslant \|p-q\|^2$, która przyda się, jeśli skorzystamy z tej samej tożsamości, ale inaczej:

$$(\ldots) = \underbrace{\|h\|^2}_{o(h)} + \underbrace{\|p-q_h\|^2 - \|p-q\|^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{2\langle h, q-q_h\rangle}_{o(h)} \geqslant o(h).$$

Tym razem pojawił się dodatkowy wyraz, ograniczony w module przez $2\|h\| \cdot \|q-q_h\|$, a więc również postaci $o(h)$. Okazuje się w ten sposób, że $d_K^2(p+h) - d_K^2(p) - 2\langle p-q, h\rangle$ jest szacowane z obu stron przez $o(h)$, czyli samo jest wręcz postaci $o(h)$. To kończy dowód różniczkowalności d_K^2 w p.

Zamiast zakończenia. W dowodzie Twierdzenia Motzkina było wiele zwrotów akcji, rozumowań nie wprost czy też trickowych obserwacji. Współczesna matematyka pełna jest podobnych rozumowań i dlatego też jest niezwykle ciekawa.

Literatura

[H] Hörmander, Lars, Notions of convexity. *Progress in Mathematics*, 127. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994. viii+414 pp. ISBN: 0-8176-3799-0.