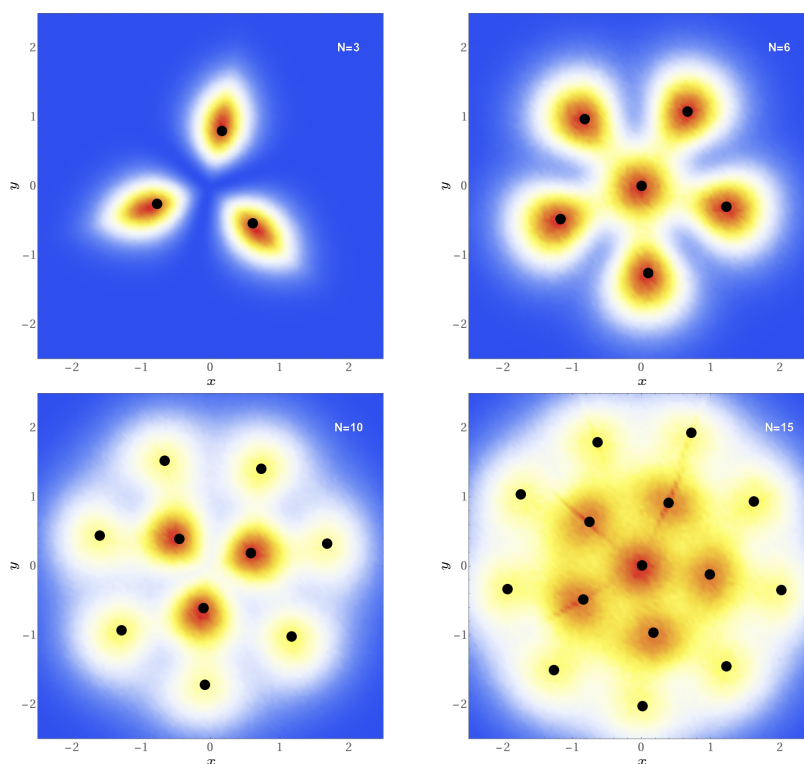


## Literatura

- [1] M. Gajda, J. Mostowski, M. Pylak, T. Sowiński, and M. Załuska-Kotur. Pauli crystals—interplay of symmetries. *Symmetry*, 12(11), 2020.
- [2] M. Gajda, J. Mostowski, T. Sowiński, and M. Załuska-Kotur. Pauli crystals: hidden geometric structures of the quantum statistics, 2015.
- [3] M. Gajda, J. Mostowski, T. Sowiński, and M. Załuska-Kotur. Single-shot imaging of trapped fermi gas. *Europhysics Letters*, 115(2):20012, aug 2016.
- [4] F. Gampel, M. Gajda, M. Załuska-Kotur, and J. Mostowski. Pauli crystals in harmonic trap and on a sphere. *Physics Letters A*, 422:127799, 2022.
- [5] M. Holtzen, L. Bayha, K. Subramanian, C. Heintze, P. M. Preiss, and S. Jochim. Observation of pauli crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 126:020401, Jan 2021.
- [6] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 12 1953.
- [7] D. Rakshit, J. Mostowski, T. Sowiński, M. Załuska-Kotur, and M. Gajda. On the observability of pauli crystals in experiments with ultracold trapped fermi gases. *Scientific Reports*, 7(1):15004, Nov 2017.



Rys. 2. Rozkłady konfiguracji  $C(x, y)$  dla różnej liczby atomów w pułapce ( $N = 3, 6, 10, 15$ ). Kolor czerwony na rysunkach oznacza największą wartość prawdopodobieństwa zaobserwowania atomu. Czarnymi punktami zaznaczono przewidywane położenia atomów (wyniki metody Monte Carlo, która została opisana w tekście)

wykazują jednak pewne uporządkowania – dokładnie tak, jak w strukturach krystalicznych.

W ostatnim czasie grupie badaczy z Heidelbergu udało się eksperymentalnie potwierdzić istnienie przedstawionych powyżej struktur [5]. Wykorzystano do tego celu ultrazimny i rozrzedzony gaz atomów  ${}^6\text{Li}$ . Dokonując wielokrotnych rekonstrukcji rozkładu gęstości pędów atomów poprzez pomiar tzw. czasu przelotu TOF, *time of flight*, oraz przeprowadzając analizę analogiczną do opisanej w tekście, udało się wyznaczyć rozkład konfiguracji, który okazał się całkowicie zgodny z teoretycznymi przewidywaniami.

## Oszczędny listonosz

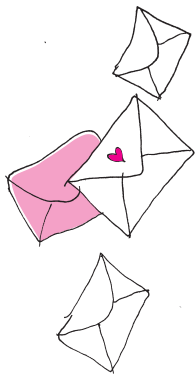
*Łukasz KAMIŃSKI\**

Wyobraźmy sobie miasteczko, w którym żyje  $n$  osób. Nie dotarł tam ani Internet, ani nawet idea urzędu pocztowego. Jest jednak zatrudniony listonosz, u którego można bezpośrednio nadać lub odebrać przesyłkę. Listonosz codziennie odwiedza każdego mieszkańca dokładnie jeden raz. Niektórzy mieszkańcy korespondują z innymi, lecz niekoniecznie każdy z każdym. Jeśli kogoś odwiedzi listonosz, to osoba ta z pewnością zapyta go, do kogo się jeszcze wybiera, a następnie wyśle list do wszystkich, z którymi koresponduje, a których listonosz jeszcze tego dnia nie odwiedził. Listonosz może sam wybrać kolejność, w jakiej odwiedza mieszkańców miasteczka. Zdążył się już też zorientować, kto z kim koresponduje, i chce odwiedzić mieszkańców w takiej kolejności, żeby w żadnym momencie nie dźwigać za dużo listów. Ile listów na pewno będzie musiał w pewnym momencie zmieścić w torbie listonosz?

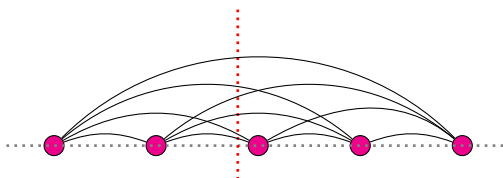
### Sami swoi

Zacznijmy od przypadku najprostszego do analizy – gdy każdy koresponduje z każdym. Wówczas niezależnie od kolejności, jaką wybrał listonosz, sytuacja

\*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



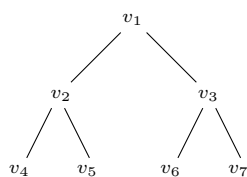
wygląda następująco: jeśli listonosz odwiedził już dokładnie  $i$  mieszkańców, to ma w torbie  $i(n-i)$  listów. Istotnie, w torbie listonosza znajdują się listy od każdego z odwiedzonych mieszkańców do każdego z  $n-i$  jeszcze nieodwiedzonych. Wykonując proste szacowanie, możemy przekonać się, że  $i(n-i)$  wynosi maksymalnie  $\frac{n^2}{4}$  dla  $n$  parzystego oraz  $\frac{n^2-1}{4}$  dla  $n$  nieparzystego, co daje nam górne ograniczenie na rozmiar torby potrzebnej listonoszowi.



Rys. 1. Graf reprezentujący miasto z pięcioma mieszkańcami, gdzie każdy koresponduje z każdym. Można dostrzec, że w pewnym momencie listonosz będzie musiał mieć przy sobie 6 listów

### Korporacja

A co, jeśli nasze miasteczko to tak naprawdę nie miasteczko, ale wielka korporacja? Naturalnie w korporacji pracownicy mają przypisany jakiś stopień awansu zawodowego. Najwyższy stopień ma oczywiście prezes, którego będziemy oznaczać  $v_1$ . Ponadto założymy, że każdy pracownik  $v_i$ , którego stopień awansu nie jest najniższy (czyli nie jest na samym dole hierarchii), ma dokładnie dwóch bezpośrednich podwładnych:  $v_{2i}$  oraz  $v_{2i+1}$ . Mają oni dokładnie o jeden mniejszy od  $v_i$  stopień awansu zawodowego. Każdy pracownik oprócz  $v_1$  ma dokładnie jednego przełożonego. W przypadku tej korporacji wiadomości będą przesyłane jedynie pomiędzy pracownikiem a jego bezpośrednim podwładnym lub odwrotnie. Jak dużą torbę musi mieć listonosz w takim przypadku?



Rys. 2. Pracownicy korporacji o trzech możliwych stopniach awansu

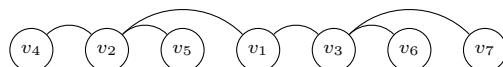
Ta sytuacja jest już nieco trudniejsza. Sformułujmy nasz problem w języku teorii grafów. Niech  $v_1, \dots, v_n$  oznaczają mieszkańców (albo pracowników, jak w przykładzie z korporacją) i niech  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Rozpatrzmy graf  $G = (V, E)$ , przy czym  $(v_i, v_j) \in E$  oznacza, że  $v_i$  i  $v_j$  korespondują ze sobą. Naszym zadaniem jest znaleźć minimalną potrzebną pojemność torby, czyli dokładnie wartość:

$$c(G) = \min_{\sigma \in \Sigma_n} \max_{1 \leq k \leq n} |\{(v_{\sigma(i)}, v_{\sigma(j)}) \in E : i \leq k < j\}|,$$

gdzie  $\Sigma_n$  oznacza zbiór wszystkich permutacji zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Funkcję  $c(G)$  nazywamy *szerokością przekroju* (ang. *cutwidth*) grafu  $G$ .

Pomyślmy o tym w następujący sposób: Ustawiamy wierzchołki grafu  $G$  na prostej  $\ell$ . Wówczas  $c(G)$  to najmniejsza liczba  $k$ , dla której istnieje ustawienie wierzchołków takie że, każda prosta prostopadła do  $\ell$  przecina co najwyżej  $k$  krawędzi (patrz rys. 1). Proste prostopadłe do  $\ell$  będziemy nazywać *przekrojami*, zaś liczbę krawędzi  $G$ , które przecinają dany przekrój, będziemy nazywać jego *szerokością*.

Wróćmy do problemu listonosza zatrudnionego w korporacji. Niech  $T_h$  oznacza pełne drzewo binarne o wysokości  $h$  (czyli dokładnie graf reprezentujący korespondujących ze sobą pracowników, jeśli mamy korporację z  $h+1$  możliwymi stopniami awansu zawodowego). Oznaczmy wierzchołki tak jak poprzednio. Zauważmy, że  $T_h$  ma  $n = 2^{h+1} - 1$  wierzchołków. Nasze zadanie polega na obliczeniu  $c(T_h)$ . Warto zacząć od małych wartości  $h$ . Łatwo stwierdzić, że  $c(T_0) = 0$  oraz  $c(T_1) = 1$ . Przy odrobinie wysiłku obliczamy też, że  $c(T_2) = 2$ . Jeśli poświęcimy problemowi nieco więcej czasu i pomysłowości, to udowodnimy, że  $c(T_3) = 3$  (zachęcamy Czytelnika Dociekliwego do samodzielnego sprawdzenia).



Rys. 3. Przykład ustawienia wierzchołków grafu  $T_2$  na prostej, realizujący szerokość przekroju równą 2

Można więc wysnuć hipotezę, iż  $c(T_h) = h$  dla wszystkich  $h \in \mathbb{N}$ . Niemałym zaskoczeniem może być zatem fakt, że  $c(T_4) = 3$ . Ogólne rozwiązanie daje następujące twierdzenie:



**Rozwiązanie zadania F 1092.**  
Na potrzeby naszego oszacowania potraktujemy Słońce i krążek jak ciała doskonale czarne wypromieniowujące energię zgodnie ze wzorem (prawo Stefana-Boltzmann):

$$P = \sigma T^4 S,$$

w którym  $P$  oznacza całkowitą moc promieniowania,  $S$  powierzchnię ciała, a  $T$  temperaturę powierzchni w skali Kelwina. Wprowadźmy oznaczenia:  $R_S$  – promień Słońca,  $R$  – odległość zwierciadła od Słońca i  $\delta$  – promień krążka (i obrazu Słońca). Moc promieniowania słonecznego docierającego do powierzchni zwierciadła wynosi:

$$P_Z = 4\pi R_S^2 \sigma T_0^4 \frac{\pi r^2}{4\pi R^2}.$$

Przyjmijmy dalej, że zwierciadło odbija doskonale, i cała moc  $P_Z$  „trafia” w krążek. Temperatura  $T$  krążka ustali się, gdy moc promieniowania z jego powierzchni (promieniują obie strony cienkiego krążka) będzie równa  $P_Z$ :

$$P_Z = 2\pi \delta^2 \sigma T^4.$$

Otrzymujemy związek:

$$\frac{R_S^2}{R^2} T_0^4 = \frac{2\delta^2}{r^2} T^4.$$

Ze względu na ogromną odległość Słońca od zwierciadła jego obraz powstaje praktycznie w ognisku zwierciadła. Przyrównując stosunki rozmiarów przedmiotu  $R_S$  i obrazu  $\delta$  do stosunków ich odległości od powierzchni zwierciadła, mamy  $R_S/R = \delta/f$  i ostatecznie:

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^4 = \frac{r^2}{2f^2}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych:  $T \approx 1600$  K.

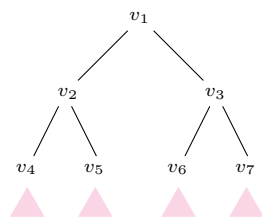
**Twierdzenie.** Dla  $h \geq 2$  zachodzi  $c(T_h) = \lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ .

Aby wykazać powyższą równość, zaczniemy od udowodnienia  $c(T_h) \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$  dla  $h \geq 2$ . Dowód będzie indukcyjny. Zostawiamy jako ćwiczenie sprawdzenie przypadków  $h = 2$  i  $h = 3$ . Chcemy udowodnić tezę dla  $T_{h+2}$  przy założeniu tezy dla  $T_h$ . Rozważmy dowolną permutację  $\sigma$  wierzchołków  $T_{h+2}$ . Rozważmy też poddrzewa  $T_{h+2}$  o korzeniach odpowiednio  $v_4, v_5, v_6, v_7$ . Wśród nich na pewno znajdziemy takie poddrzewo  $P$ , które nie zawiera  $v_{\sigma(1)}$  ani  $v_{\sigma(n)}$ .

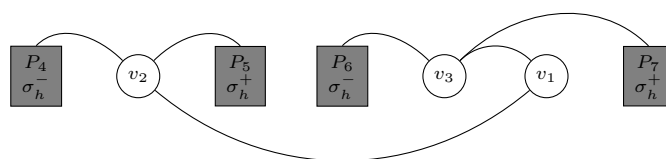
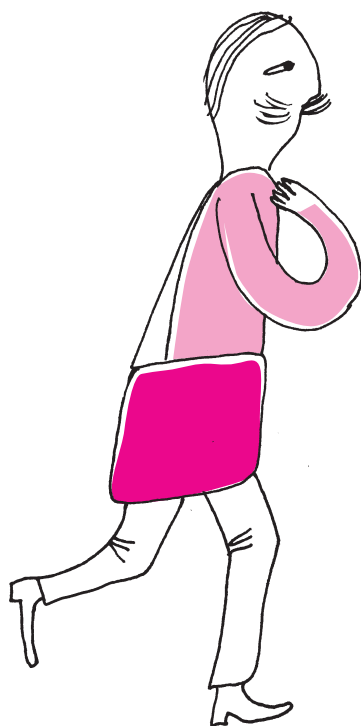
Ponieważ  $P$  wygląda tak samo jak  $T_h$  (tzn. różnią się one jedynie nazwami wierzchołków, a matematyk powiedziałaby, że są izomorficzne), więc z założenia indukcyjnego  $c(P) \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ . Oznacza to, że jeśli ustawimy wierzchołki  $T_{h+2}$  na prostej  $\ell$  w takiej kolejności jak w permutacji  $\sigma$ , to pewna prosta  $\ell^\perp$  prostopadła do  $\ell$  będzie przecięta przez co najmniej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$  krawędzi  $P$ . Zauważmy, że istnieje ścieżka z  $v_{\sigma(1)}$  do  $v_{\sigma(n)}$ , która nie zawiera wierzchołków z  $P$ . Oznacza to, że prostą  $\ell^\perp$  przecina też pewna krawędź z tej ścieżki, czyli łącznie co najmniej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 2 = \lceil \frac{h+2}{2} \rceil + 1$  krawędzi, co należało udowodnić.

Teraz trzeba jeszcze znaleźć dla każdego  $h \geq 2$  taką permutację  $\sigma_h$  wierzchołków  $T_h$ , która zaświadcza, że szerokość przekroju  $T_h$  faktycznie wynosi co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ . Zaczniemy od konstrukcji dla nieparzystych  $h$ . Teza indukcji będzie nawet nieco mocniejsza: istnieje takie ustawienie  $\sigma_h^-$  wierzchołków  $T_h$  na prostej, przy którym każdy przekrój na lewo od korzenia ma szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ , zaś każdy przekrój na prawo od korzenia ma szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil$ . Łatwo znaleźć takie ustawienie dla  $h = 1$ . Udowodnimy teraz tezę dla  $h + 2$  przy założeniu tezy dla  $h$ . Niech  $\sigma_h^+$  oznacza ustawienie wierzchołków  $T_h$  powstałe z  $\sigma_h^-$  przez zapisanie wierzchołków w odwrotnej kolejności (wtedy każdy przekrój na prawo od korzenia ma szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ , zaś każdy przekrój na lewo od korzenia co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil$ ). Zauważmy, że poddrzewa  $P_4, P_5, P_6, P_7$  drzewa  $T_{h+2}$  o korzeniach odpowiednio  $v_4, v_5, v_6, v_7$  są izomorficzne z  $T_h$ , więc ma sens powiedzieć, że ustawiamy wierzchołki któregoś z nich w kolejności  $\sigma_h^+$  lub  $\sigma_h^-$ . Ustawmy więc wierzchołki  $T_{h+2}$  w następującej kolejności: najpierw wierzchołki  $P_4$  w kolejności  $\sigma_h^-$ , potem  $v_2$ , następnie wierzchołki  $P_5$  w kolejności  $\sigma_h^+$ , wierzchołki  $P_6$  w kolejności  $\sigma_h^-$ ,  $v_3, v_1$ , a na koniec wierzchołki  $P_7$  w kolejności  $\sigma_h^+$  (rys. 5). Nietrudno sprawdzić, że tak otrzymana kolejność  $\sigma_{h+2}^-$  spełnia tezę indukcyjną, to znaczy przekroje na lewo od  $v_1$  mają szerokość co najwyżej  $\lceil \frac{h+2}{2} \rceil + 1$ , zaś te na prawo – co najwyżej  $\lceil \frac{h+2}{2} \rceil$ .

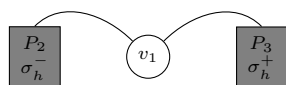
Pomysł, żeby pokazywać tezę dla  $h + 2$ , zakładając jej prawdziwość dla  $h$ , nie jest taki oczywisty, ale wydaje się w tym przypadku jedynym słusznym. Autor widział wiele prób pokazania tezy dla  $h + 1$ , przy założeniu jej prawdziwości dla  $h$ , ale wszystkie one były błędne.



Rys. 4. Drzewo  $T_{h+2}$  i poddrzewa o korzeniach  $v_4, v_5, v_6, v_7$



Rys. 5. Kolejność wierzchołków  $T_{h+2}$  w konstrukcji indukcyjnej



Rys. 6. Konstrukcja odpowiedniego porządku dla  $h$  parzystych

Mając tak wzmocnioną tezę udowodnioną dla wszystkich  $h$  nieparzystych, nietrudno już udowodnić, że dla  $h$  parzystych również mamy permutację zaświadczałą, że szerokość przekroju  $T_h$  wynosi co najwyżej  $\lceil \frac{h}{2} \rceil + 1$ . Odpowiednią konstrukcję przedstawia rysunek na marginesie, a szczegóły pozostawiamy jako zadanie dla Czytelnika.

W ten sposób problem listonosza w korporacji został rozwiązany. Zachęcamy do pomyślenia, jak dużej torby będzie potrzebował listonosz w jeszcze innych sytuacjach, np. gdy graf pokazujący komunikowanie się mieszkańców w miasteczku jest cyklem albo pełnym grafem dwudzielnym.

Na koniec dodajmy, że w teorii grafów rozważa się wiele różnych parametrów nazywanych ogólnie szerokościami grafowymi. Typowo z każdym takim parametrem wiąże się pewna dekompozycja i jeśli graf ma *małą* wartość parametru, to możemy znaleźć odpowiednio *prostą* dekompozycję. *Cutwidth* jest uznawany za jeden z najbardziej podstawowych parametrów tego typu – dekompozycja to liniowe ułożenie wierzchołków grafu i jest ona *prosta*, jeśli przez każdy jej przekrój przechodzi *mało* krawędzi.

Inne przykłady szerokości grafowych na pewno pojawią się jeszcze nie raz w *Delcie* – przyp. red.