Nie tylko dla płaszczaków

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Wiele matematycznych zagadnień z geometrii przestrzennej ma swoje odpowiedniki na płaszczyźnie. Tutaj zajmiemy się właśnie takimi zadaniami. Rozwiązanie płaskiej wersji często pomaga zrozumieć problem w przestrzeni. Bywa nawet tak, że dwuwymiarowy odpowiednik jest lematem niezbędnym do rozwiązania zadania.

Jako przykład podamy tu uogólnienie następującego *twierdzenia o stycznych*: jeśli z punktu P poprowadzimy proste styczne do pewnego okręgu w punktach A i B, to $|AP| = |BP|$. Naturalne jest następujące uogólnienie:

Twierdzenie 1. Jeśli z punktu P poprowadzimy proste styczne do pewnej sfery w punktach A i B, to $|AP| = |BP|$.

Dowód. Rozważmy przekrój sfery płaszczyzną ABP. Otrzymamy w nim okrąg, do którego proste AP i BP są styczne – stąd $|AP| = |BP|$, na mocy twierdzenia z planimetrii.

Można jeszcze inaczej. Do sfery styczne mogą być nie tylko proste, ale również płaszczyzny.

Twierdzenie 2. Płaszczyzny przecinające się wzdłuż prostej PQ są styczne do pewnej sfery w punktach A i B. Wówczas trójkąty APQ i BPQ są przystające.

Dowód. Proste AP i BP są styczne do danej sfery, więc $|AP| = |BP|$, analogicznie $|AQ| = |BQ|$. Wobec tego trójkąty APQ i BPQ są przystające na mocy cechy (bbb).

Aby zilustrować powyższe zależności, rozwiążemy następujące

Zadanie 3D. Każdą ścianę pewnego wielościanu wypukłego pomalowano na czerwono lub na niebiesko, przy czym każde dwie sąsiednie ściany (ze wspólnym bokiem) mają inne kolory. Ponadto w ten wielościan można wpisać sferę. Udowodnić, że sumy pól ścian czerwonych i niebieskich są równe.

A oto jego dwuwymiarowy odpowiednik:

Zadanie 2D. Każdy bok pewnego wielokąta wypukłego pomalowano na czerwono lub na niebiesko, przy czym każde dwa boki sąsiednie (ze wspólnym wierzchołkiem) mają inne kolory. Ponadto w ten wielokąt można wpisać okrąg. Udowodnić, że sumy długości boków czerwonych i niebieskich są równe.

Rozwiązanie zadania 2D. Niech $A_1A_2\ldots A_n$ będzie danym wielokątem. Przez T_i oznaczmy punkt styczności okręgu wpisanego do boku A_iA_{i+1}, przy czym przyjmujemy $A_{n+1} = A_1$ oraz $T_{n+1} = T_1$. Podzielmy brzeg wielokąta na pary odcinków postaci T_iA_{i+1}, $A_{i+1}T_{i+1}$. Ich długości są równe na mocy twierdzenia o stycznych, ponadto mają różne kolory. Z tego wynika teza.

Rozwiązanie zadania 3D. Niech $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_n$ będą ścianami danego wielościanu i niech T_i oznacza punkt styczności sfery wpisanej do ściany $\mathcal{S}_i$. Niech $\mathcal{S}_i$ i $\mathcal{S}_j$ będą ścianami ze wspólną krawędzią AB. Na mocy twierdzenia 2 trójkąty ABT_i i ABT_j są przystające, więc mają równe pola. Ponadto te trójkąty są różnych kolorów. Całą powierzchnię wielościanu możemy podzielić na pary takich trójkątów, więc łączne pole czerwonej powierzchni jest takie samo jak niebieskiej.

O podobnych metodach pisał już Michał Kieza w *Kąciku Przestrzennym* (odcinek 7, Δ^3_{11}).

Zadania

1. Okrąg o jest częścią wspólną sfer s_1 i s_2. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o. Punkt P, leżący poza płaszczyzną okręgu o, jest dowolny. Prosta PA przecina sferę s_1 w punkcie $A_1 \neq A$ i sferę s_2 w punkcie $A_2 \neq A$; analogicznie określamy punkty B_1, B_2, C_1, C_2. Dowieść, że płaszczyzny $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ są równoległe.
2. Dany jest wielościan wypukły $\mathcal{P}$ o dziewięciu wierzchołkach: $A, B_1, B_2, \ldots, B_8$. Wielościan $\mathcal{P}_k$ jest wielościanem $\mathcal{P}$ przesuniętym o wektor $\overrightarrow{AB_k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, 8$. Dowieść, że dla pewnych $i \neq j$ wnętrza wielościanów $\mathcal{P}_i$ i $\mathcal{P}_j$ przecinają się.
3. W czworościanie $ABCD$ wszystkie wewnętrzne kąty dwuścienne są ostre. Punkt S leży wewnątrz tego czworościanu, a jego odległość od każdej z płaszczyzn ABC, BCD, CDA, DAB jest większa niż 1. Dowieść, że przynajmniej dwa spośród odcinków AS, BS, CS, DS mają długość większą niż $\sqrt{5}$.
4. Czy sześcian można rozciąć na skończoną i większą niż 1 liczbę parami nieprzystających sześcianów?

Wskazówki do zadań

1. W przekroju płaszczyzną ABP mamy dwuwymiarową wersję zadania, w której dowodzimy, że $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

2. Wygodnie jest spojrzeć na analogiczne zadanie dla pięciokąta (dlaczego akurat pięciokąta?). Wszystkie dane translacje mieszczą się w obrazie wielokąta/wielościanu w jednokładności o współczynniku 2 względem punktu A.

3. Niech S' będzie rzutem prostopadłym S na trójkąt ABC. Odległości S' od boków trójkąta ABC są większe niż 1 – mamy więc do czynienia z analogicznym zadaniem na płaszczyźnie. Najlepszym kandydatem na dużą odległość od S' jest ten wierzchołek trójkąta, przy którym jest najmniejszy kąt (musi być nie większy od 60°). Jeśli wykażemy, że, powiedzmy, $|AS'| > 2$, to $|AS| \geqslant \sqrt{5}$. Potem robimy to samo z trójkątem BCD.

4. Dwuwymiarowa wersja zadania ma zupełnie inną odpowiedź – można rozciąć kwadrat na różne kwadraty, ale znaleźć taki podział jest bardzo trudno (najmniejszą możliwą liczbą kwadratów jest 21). Niemniej jednak warto pochylić się nad tym problemem i zauważyć, że najmniejszy kwadrat z podziału nie może być przy brzegu. Podział sześcianu na sześciany dałby na jego dowolnej ścianie podział kwadratu na kwadraty. Weźmy najmniejszy z tych sześcianów, które są przy pewnej ścianie dużego sześcianu. Jest on otoczony przez większe sześciany, więc na ścianie przeciwległej do tej, którą przylega do dużego sześcianu, musi z nim sąsiadować mniejszy sześcian. Kontynuując to rozumowanie, otrzymalibyśmy nieskończony ciąg coraz mniejszych sześcianów.