Babo, babo, udaj się!

*Michał MIŚKIEWICZ**

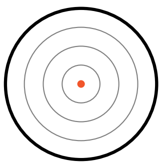
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

…bo jak nie, to cię zjem! Od kiedy moja córeczka zaczęła odwiedzać place zabaw, a w szczególności piaskownice, regularnie słyszę to dziecinne zaklęcie.† Podczas jednej ze wspólnych zabaw zdarzyło mi się bezwiednie wsypywać do odwróconych foremek suchy piasek. Ten materiał słabo nadaje się do tworzenia większych konstrukcji. Chociaż dokładałem go do oporu z każdej strony, piasek bezlitośnie przesypywał się przez krawędzie foremki i pozostawiał jedynie niewysoki kopczyk.

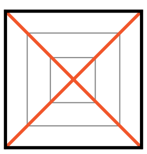
†Ściśle rzecz biorąc, używa ona skróconej wersji „*babo babo zjem!*”, ale ma dopiero półtora roku, więc pewnie jeszcze się nauczy.

Zauważyłem jednak, że kształt kopczyka zależy w nieoczywisty sposób od kształtu foremki (przykłady widać na rysunkach 1–4). W okrągłej foremce naturalnie tworzył się piaskowy stożek, charakteryzujący się gładką powierzchnią z każdej strony oraz czubkiem w najwyższym punkcie. Foremka kwadratowa pozwalała utworzyć piramidę na wzór tych egipskich – ma ona cztery krawędzie zbiegające się u szczytu. W piaskownicy miałem też dostęp do imponującej wieży, której podstawą był kwadrat o zaokrąglonych kantach. Kopczyk nadal przypominał piramidę, ale jego krawędzie „urywały się” przed dojściem do brzegu. Dało mi to do myślenia i wypróbowałem jeszcze kilka foremek, co potwierdziło moje przypuszczenia – jeśli badana foremka miała gładki fragment brzegu, to krawędzie kopczyka tam nie sięgały.

Poniżej foremki w różnych kształtach – na szaro zaznaczone są poziomice, a kolorem krawędzie powstałych kopczyków.

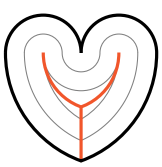


Rys. 1. Koło



Rys. 2. Kwadrat

Rys. 3. Zaokrąglony kwadrat



Rys. 4. Serce

Dlaczego tak jest? Dla weteranów piaskownic odpowiedź być może jest oczywista, dla mnie jednak nie była. Zapraszam więc Czytelnika, by razem ze mną przeszedł przez wyjaśnienie, do którego doszedłem. Okazuje się, że oprócz rozwiązania Zagadki Kanciastych Kopczyków pozwala też ono z nietypowej strony obejrzeć ciekawe zakątki analizy matematycznej.

Kopczyki a funkcja odległości. Opis kształtu kopczyka zacznijmy od podstaw: przyjmijmy, że foremka ma kształt dwuwymiarowej figury $F \subseteq \mathbb{R}^2$, a powierzchnia kopczyka jest wykresem funkcji $d\colon F \to \mathbb{R}$ mierzącej wysokość n.p.b.f. (*nad poziomem brzegu foremki*). Z definicji wynika więc, że $d(\mathbf{x}) = 0$ dla punktów $\mathbf{x}$ leżących na brzegu foremki (oznaczanym odtąd przez ∂F) oraz $d(\mathbf{x}) > 0$ dla punktów wewnątrz. Skłonność piasku do osypywania się daje ograniczenie na to, jak stromy może być kopczyk. Dla uproszczenia przyjmiemy, że maksymalne nachylenie to 45°, a więc dowolne dwa punkty na wykresie $(\mathbf{x}, d(\mathbf{x}))$, $(\mathbf{y}, d(\mathbf{y}))$ są odległe w pionie nie więcej niż w poziomie. Sprowadza się to do *warunku Lipschitza* na funkcję d:

$$|d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{dla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F.$$

Jeśli α jest górnym ograniczeniem na kąt spadku (zależnym od parametrów użytego piasku), to warunek na d przyjmuje postać ogólnego warunku Lipschitza $|d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leqslant L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ze stałą $L = \operatorname{tg}\alpha$. Dla uproszczenia rozważań przyjęliśmy tu, że $L = 1$.

Funkcji spełniających te warunki jest oczywiście dużo. Nas interesuje ta, która odpowiada największemu możliwemu kopczykowi, rozpatrujemy bowiem sytuację, w której piasek dosypany w dowolnym miejscu obsypuje się poza foremkę. Do rozwiązania mamy więc problem optymalizacyjny z więzami:

$$d(\mathbf{x}) = \max \ \text{ dla } \mathbf{x} \in F$$

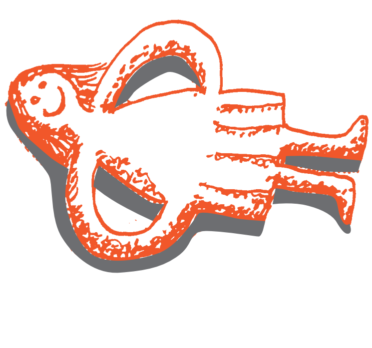
wśród funkcji spełniających

$$\begin{cases} |d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{y})| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| & \text{dla } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F, \\ d(\mathbf{x}) = 0 & \text{dla } \mathbf{x} \in \partial F. \end{cases}$$

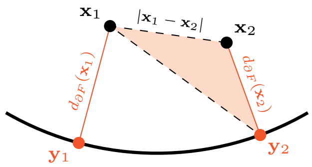
Rozwiązanie można zacząć od obserwacji, że dla $\mathbf{y}$ z brzegu i $\mathbf{x}$ dowolnego z przyjętych więzów i nierówności trójkąta wynika nierówność:

$$d(\mathbf{x}) \leqslant d(\mathbf{y}) + |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Otrzymana nierówność daje najwięcej informacji, gdy $\mathbf{y}$ jest punktem brzegu najbliższym punktowi $\mathbf{x}$; możemy więc skonkludować, że $d(\mathbf{x})$ nie przewyższa $\min\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{y} \in \partial F\}$. Tę ostatnią wielkość nazwiemy odległością $\mathbf{x}$ od brzegu i oznaczymy przez $d_{\partial F}(\mathbf{x})$.



Pozostaje sprawdzić, że funkcja $d_{\partial F}$ również spełnia nałożone ograniczenia – wówczas będziemy mieli pewność, że to właśnie jest szukana funkcja



Rys. 5. Nierówność trójkąta zastosowana dla $\triangle \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2$ (oraz $\triangle \mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{y}_1$) pozwala porównać wielkości $d_{\partial F}(\mathbf{x}_1)$ i $d_{\partial F}(\mathbf{x}_2)$

odpowiadająca największemu możliwemu kopczykowi. Warunek $d(\mathbf{x}) = 0$ dla $\mathbf{x}$ z brzegu jest spełniony automatycznie, gdyż minimum jest przyjmowane dla $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Natomiast jeśli dane są dwa punkty $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in F$ oraz najbliższe im punkty $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \partial F$ (jak na rys. 5), to z nierówności trójkąta mamy:

$$\underbrace{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1|}_{d_{\partial F}(\mathbf{x}_1)} \leqslant |\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_2| \leqslant |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| + \underbrace{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2|}_{d_{\partial F}(\mathbf{x}_2)},$$

a więc $d_{\partial F}(\mathbf{x}_1) - d_{\partial F}(\mathbf{x}_2) \leqslant |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$. Po połączeniu z analogiczną nierównością, w której $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ są zamienione miejscami, daje to warunek Lipschitza dla $d_{\partial F}$. Wniosek: szukaną funkcją d jest $d_{\partial F}$.

Krawędzie kopczyków w języku analizy. Okazuje się, że analiza matematyczna dysponuje właściwym językiem do opisu gładkich i niegładkich fragmentów kopczyków – kluczem jest tu pojęcie *różniczkowalności* funkcji d. Zacznijmy od obserwacji, że cechą odróżniającą gładkie fragmenty od krawędzi i wierzchołków jest możliwość określenia płaszczyzny stycznej (przydatna, gdy zdecydujemy się ozdabiać kopczyk fragmentami muszelek). Ogólne równanie na płaszczyznę przechodzącą przez wybrany punkt wykresu $(x_1, x_2, d(x_1, x_2))$ to:

$$(z_1, z_2, z_3): \quad z_3 = d(x_1, x_2) + a_1 \cdot (z_1 - x_1) + a_2 \cdot (z_2 - x_2),$$

natomiast płaszczyznę taką nazywamy styczną, gdy dobrze przybliża ona wykres funkcji d, a więc gdy z_3 wyliczone ze wzoru wyżej jest *blisko* wartości $d(z_1, z_2)$. Warunek ten można ściśle sformułować poprzez zbieżność:

$$(\star) \quad \frac{d(x_1, x_2) + a_1 \cdot (z_1 - x_1) + a_2 \cdot (z_2 - x_2) - d(z_1, z_2)}{\sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{przy } (z_1, z_2) \to (x_1, x_2).$$

Nietrudno się przekonać, że jeśli funkcja d jest różniczkowalna w (x_1, x_2), czyli istnieje para liczb a_1, a_2 spełniających $(\star)$, to jest ona tylko jedna. Funkcję liniową $L(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ nazywamy wtedy *różniczką*, a wektor $[a_1, a_2]$ *gradientem* d w (x_1, x_2). Wektor ten wyznacza kierunek najszybszego wzrostu funkcji d, a jego długość odpowiada za lokalne tempo tego wzrostu.

W naszym przypadku warunek Lipschitza implikuje ograniczenie $a_1^2 + a_2^2 \leqslant 1$, które geometrycznie możemy interpretować jako ograniczenie odchylenia płaszczyzny stycznej od poziomu.

Czytelnik mający za sobą kurs analizy matematycznej wielu zmiennych rozpozna w powyższym warunku definicję różniczkowalności. Konkretnie, funkcję d uznajemy za różniczkowalną w punkcie (x_1, x_2), jeśli istnieją liczby a_1, a_2 spełniające warunek $(\star)$. Pojęcie różniczkowalności jest kluczowe dla tej dziedziny i wypada poświęcić mu kilka słów, ale pozostawmy je na marginesie obok.

Dla wyrobienia lepszej intuicji wróćmy na chwilę do rysunku 2. Jeśli przyjmiemy, że kwadrat na rysunku to zbiór zadany nierównościami $|x_1|, |x_2| \leqslant 1$, to funkcja odległości od brzegu d jest dana wzorem $1 \pm x_{1,2}$, zależnie od części kwadratu. Na przykład w trójkącie zadanym przez $-x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1$ mamy $d(x_1, x_2) = 1 - x_1$, a więc sama funkcja d jest liniowa! Nie jest więc zaskakujące, że w każdym punkcie wewnętrznym tego trójkąta para $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ spełnia warunek $(\star)$ – po prostu licznik się zeruje dla $\mathbf{z}$ dostatecznie bliskich $\mathbf{x}$. Z kolei w punktach leżących na przekątnych ($x_1 = \pm x_2$) par a_1, a_2 spełniających $(\star)$ po prostu nie ma.

Zagadka Kanciastych Kopczyków. Wyjaśnienie zagadki opiera się na następującym twierdzeniu, które tutaj przytoczymy bez dowodu:

Twierdzenie. *Jeśli $C \subseteq \mathbb{R}^2$ jest gładką zamkniętą krzywą, to funkcja odległości d_C jest różniczkowalna w każdym punkcie r-otoczki C, czyli zbioru*

$$C_r := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < r \text{ dla pewnego } \mathbf{y} \in C\right\},$$

o ile $r > 0$ jest odpowiednio małe (mniejsze od odwrotności krzywizny w każdym punkcie C).

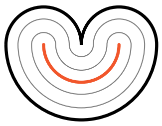
Jest to szczególny przypadek twierdzenia o otoczeniu tubularnym, które stali Czytelnicy *Delty* mogą znać z artykułu o obwarzankach w Δ^9_{22}. W naszym przypadku wystarczy za krzywą C przyjąć brzeg ∂F, by przekonać się, że gładki brzeg gwarantuje różniczkowalność d w pewnym otoczeniu ∂F, a więc krawędzie (składające się z punktów nieróżniczkowalności) do tego brzegu nie mogą dochodzić. Jest możliwa nawet bardziej ilościowa analiza: jeśli na rysunku 3 przyjmiemy, że zaokrąglone kanty to łuki okręgu o promieniu r, to krzywizna brzegu jest ograniczona z góry przez $1/r$. I rzeczywiście, krawędzie kończą się dokładnie w odległości r od brzegu.

Rozwiązanie zadania M 1771.
Odpowiedź: 9.
Jak wiadomo, każda liczba daje taką samą resztę przy dzieleniu przez 9 jak jej suma cyfr. Dlatego też

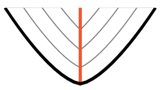
$$9 \mid A - B = \underbrace{11\ldots1}_{N},$$

więc $9 \mid N$ i tym samym $N \geqslant 9$. Wartość $N = 9$ można uzyskać w następujący sposób:

$$9012345678 - 8901234567 = 111111111.$$



Rys. 6. Zaokrąglone serce albo dwupalczasta stopa



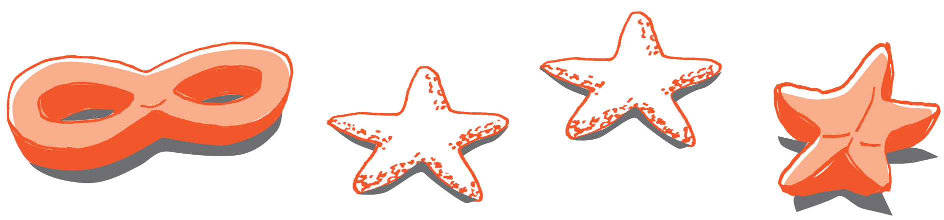
Rys. 7. Wykres funkcji $y = |x|^{3/2}$ (można sobie wyobrazić, że dopełniony łukiem od góry)

Co dalej? Dalsza zabawa piaskiem prowadzi do wniosku, że sytuacja jest jeszcze ciekawsza. Są kształty, jak na rysunku 6, gdzie foremka ma kant, ale kopczyk jest gładki mimo to. Kluczowe jest tutaj, że kant jest skierowany do wewnątrz; powoduje on, że funkcja odległości nie jest różniczkowalna *na zewnątrz* foremki, ale tego już nie widzimy. Podobny efekt uzyskamy, jeśli nasypiemy sobie piasku na stopę.

Są też foremki jak ta na rysunku 7, która wydaje się gładka, ale kopczyk ma krawędź aż do brzegu. Tu diabeł tkwi w szczegółach – okazuje się, że brzeg foremki nie jest dostatecznie gładki. Owszem, ma wszędzie określoną prostą styczną, ale jego krzywizna jest nieograniczona. W języku analizy: funkcja $|x|^{3/2}$ jest rożniczkowalna, ale tylko raz, a dwukrotnie już nie.

W odróżnieniu od „zewnętrznych kopczyków” te „wewnętrzne” zawsze mają jakąś niegładkość. Dobrym ćwiczeniem jest pokazanie, że funkcja $d_{\partial F}$ nigdy nie jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x} \in F$ najdalszym od brzegu.

Wreszcie, ciekawy jest przypadek, gdy usypujemy kopczyk *na zewnątrz* foremki – w następnym numerze ukaże się artykuł Sławomira Dinewa poświęcony temu zagadnieniu. Trudno sobie wyobrazić, jak taki kopczyk wykonać w piaskownicy – na plaży być może byłaby szansa – ale sam problem okazuje się całkiem bogaty od strony czysto matematycznej. Foremki, dla których „zewnętrzne kopczyki” są gładkie, całkowicie charakteryzuje twierdzenie Motzkina... ale o tym za miesiąc!



O czym lepiej zapomnieć?

*Wojciech PRZYBYSZEWSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Mam wrażenie, że jeszcze kilka lat temu każda reklama laptopa składała się wyłącznie z wykrzykiwanych przez lektora kolejnych angielskich skrótów (np. RAM, SSD, HDMI), czasami wraz z wartościami liczbowymi je opisującymi. Wydaje mi się, że celem tych reklam nie było przekazanie widzowi informacji o parametrach sprzedawanego sprzętu, a jedynie zrobienie wrażenia na tych, którzy nie wiedzieli, co oznaczają wymienione skróty i wartości liczbowe, tak aby zyskali przekonanie, że prezentowany laptop korzysta z najnowszych technologii w ich najlepszym wydaniu. Z biegiem czasu ilość takich reklam się zmniejszała, pewnie przez fakt, że coraz więcej konsumentów ma świadomość, czym różni się np. pamięć RAM od dysku SSD.

W tym artykule skupimy się właśnie na parametrach związanych z pamięcią. Wiemy, że rodzajów pamięci w komputerze jest kilka – mamy m.in. rejestry, cache, RAM, dysk SSD, dysk twardy. To, czym się one od siebie różnią, świetnie opisał Tomasz Idziaszek w artykule *Pamięć w komputerze* w Δ^5_{16}. Nie będziemy tutaj powtarzać całego artykułu, ale wspomnimy tylko najważniejszy wniosek – główne różnice pomiędzy wymienionymi rodzajami pamięci to ich cena i szybkość dostępu do danych. Im szybszy jest jakiś rodzaj pamięci, tym jest droższy i mniej mamy go w komputerze. Dla przykładu laptop, na którym piszę ten artykuł, ma 477 GB pamięci na dysku SSD i 16 GB (czyli prawie 30 razy mniej) szybszej pamięci RAM.

W jaki sposób ta zależność między ilością a szybkością różnych rodzajów pamięci wpływa na działanie procesora? Generalnie zasada jest prosta – jeśli procesor musi skorzystać z danych, które znajdują się w wolniejszej pamięci, to przenosi je do szybszej pamięci, aby mieć do nich łatwiejszy dostęp. W teorii brzmi świetnie, ale przecież szybszej pamięci mamy mniej. Co, jeśli procesor chce przenieść jakieś dane z dysku SSD do pamięci RAM, ale okazuje się, że jest ona już w całości wypełniona? Nie ma rady, trzeba wtedy coś z pamięci

Rozwiązanie zadania M 1772.
Oznaczmy przez S zbiór punktów z zadania. Rozważmy jeden z punktów $A \in \mathcal{S}$, który jest końcem dokładnie a odcinków. Rozpatrzmy prostą ℓ przechodzącą przez A, która nie jest równoległa do żadnej z prostych łączących pary punktów z $\mathcal{S}$. Przesuwając równolegle prostą ℓ, możemy otrzymać proste ℓ_1 i ℓ_2 (równoległe do ℓ), które w pasie pomiędzy nimi nie zawierają ani jednego punktu z $\mathcal{S}$, za wyjątkiem punktu A.

Niech prosta ℓ_1 przecina dokładnie x odcinków wychodzących z punktu A. Wtedy ℓ_2 przecina pozostałe $a - x$ odcinki, gdyż każdy odcinek wychodzący z punktu A przecina dokładnie jedną z prostych ℓ_1 i ℓ_2. Ponadto każdy odcinek łączący dwa punkty z $\mathcal{S}$, różne od A, albo przecina obie proste ℓ_1 i ℓ_2, albo żadnej. Wobec tego liczby odcinków przeciętych prostymi ℓ_1 i ℓ_2 różnią się o $x - (a - x) = 2x - a$. Zgodnie z warunkami zadania liczba ta musi być parzysta. Oznacza to w szczególności, że a jest liczbą parzystą.