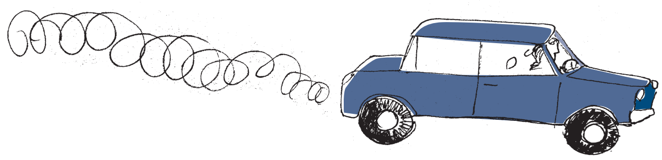
Nie wspomniałem jeszcze o bardzo ważnym zagadnieniu, ba, w dzisiejszym przemyśle jądrowym absolutnie priorytetowym – o bezpieczeństwie. Zanim reaktor w ogóle zostanie uruchomiony, podlega rygorystycznym testom. Sprawdza się zachowanie reaktora w przypadkach takich, jak awaria turbiny, utrata zewnętrznego zasilania czy problem z obiegiem wody chłodzącej – właściwie we wszystkich istotnych sytuacjach związanych zarówno z normalną eksploatacją, jak i awariami elektrowni.

Przy okazji opowiedzmy, jak dokonać wyłączenia reaktora. Dokonuje się tego poprzez użycie prętów regulacyjnych. Opuszczając je, wygaszamy powoli reakcję łańcuchową. W przypadku awarii reaktor powinien wyłączyć się automatycznie. Należy pamiętać, że nawet wygaszony reaktor nadal wydziela energię zwaną ciepłem powyłączeniowym. Musi być ono odprowadzane za pomocą układów chłodzenia, mimo że po wyłączeniu moc reaktora spada do ułamków procenta mocy, z którą na co dzień pracuje.

Świeżo wybudowane bloki jądrowe będą mogły pracować przez ponad pół wieku, dając ludziom i przemysłowi dostęp do energii elektrycznej nieprzypłaconej emisjami gazów cieplarnianych. Część z nich zastąpi stopniowo już wyłączane reaktory poprzedniej generacji, a inne – tak jak w przypadku Polski – będą pierwszymi tego typu obiektami w historii swojego kraju.



Problemy z dowodem prawa pól w *Principiach* Newtona?

*Grzegorz ŁUKASZEWICZ**

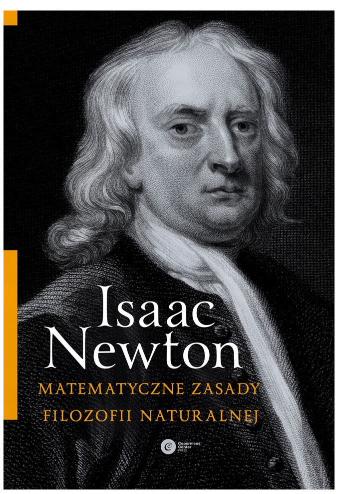
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Artykuł ten poświęcam pamięci profesora Tadeusza Nadziei, bliskiego kolegi, fascynata historii matematyki.

Twierdzeniem, od którego zaczynają się *Principia*, jest następujący fundamentalny rezultat.

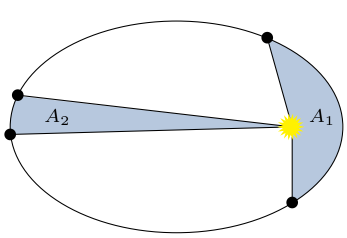
Teza I. Twierdzenie I. Księga I (prawo pól). *Powierzchnie zakreślane przez pociągnięte do nieruchomych centrów sił promienie wodzące krążących ciał leżą we wspólnych płaszczyznach i są proporcjonalne do czasów, w których są zakreślane.* [Newton, 2015]

Chodzi tu o *centralne pole sił*, a więc układ, w którym siła działająca na ciało P jest proporcjonalna do wektora $\overrightarrow{OP}$ (*wektora wodzącego*), gdzie O jest ustalonym punktem (*centrum siły*). Wówczas w równych odstępach czasu wektor wodzący zakreśla figury o równym polu. Możemy rozsądnie przyjąć, że Newtonowi chodziło o dowolne ciągłe pola sił i gładkie orbity. Celem *Principiów* było bowiem badanie realnego świata fizycznego, w szczególności Układu Słonecznego, a nie budowanie abstrakcyjnej teorii matematycznej. Przykładem opisanej tu sytuacji jest drugie prawo Keplera, w którym centrum siły jest umieszczone w nieruchomym Słońcu, a ciałami przyciąganymi przez nie są planety poruszające się po orbitach eliptycznych (rys. 1).



Isaac Newton, *Matematyczne Zasady Filozofii Naturalnej*, Copernicus Center Press, 2015

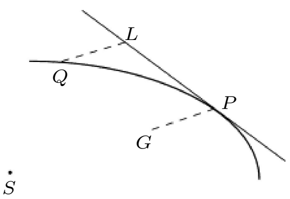
Michael Nauenberg w [Nauenberg, 2003] napisał, że „Słusznie uważa się tę tezę za kamień węgielny *Principiów*, ponieważ proporcjonalność między obszarem omiatanym przez wektor promienia orbity a upływającym czasem umożliwiła Newtonowi rozwiązywanie problemów dynamicznych metodami czysto geometrycznymi, uzupełnionymi przez argumenty ciągłego przejścia do granicy, które sam rozwinął".



Rys. 1. Drugie prawo Keplera to szczególny przypadek prawa pól

Odnotujmy, że Twierdzenie mówi o dwóch własnościach ruchu:

Własność 1. ruch odbywa się w nieruchomej płaszczyźnie;
Własność 2. pola powierzchni zakreślonych przez promień wodzący są proporcjonalne do czasów, w których są zakreślone.



Rys. 2. Ruch po trajektorii PQ to odchylenie ruchu bezwładnego w kierunku PL spowodowane *ciągłą* siłą działającą w kierunku centrum S. Po pewnej chwili h ciało znajduje się w punkcie Q (zamiast w punkcie L). Miarą tej siły w punkcie P jest granica $\lim_{h\to 0}(\vec{LQ}/h^2)$. Odchylenie wzdłuż przekątnej PQ równoległoboku $PGQL$ odpowiadałoby hipotetycznej sile *impulsowej* w punkcie P, dla której powyższa granica jest nieskończona.

Rozwiązanie zadania F 1087. Posłużymy się analizą wymiarową, zakładając, że poszukiwana zależność ma postać:

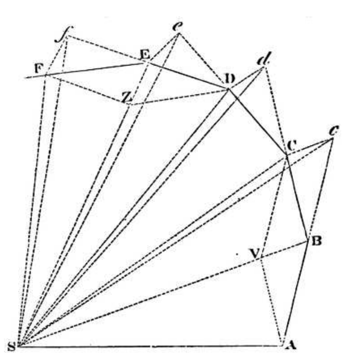
$$f = A\rho^a\gamma^b r^c.$$

Uzgodnijmy wymiary lewej i prawej strony równania na f. A jest bezwymiarową stałą. W układzie SI f ma wymiar 1/s, ρ ma wymiar kg/m^3, a γ wymiar N/m = kg/s^2. Przyrównując potęgi, w jakich jednostki s, kg i m występują po obu stronach zależności, otrzymujemy układ równań: $2b = 1$; $a + b = 0$; $c - 3a = 0$, którego rozwiązaniem są: $b = -a = 1/2$ oraz $c = 3a = -3/2$. Ostatecznie:

$$f = A\sqrt{\frac{\gamma}{\rho r^3}}.$$

Analiza wymiarowa nie pozwala wyznaczyć współczynnika A. Jego wartość zależy od rodzaju drgania (odkształcenia względem powierzchni sferycznej). Odpowiednie wzory podał Lord Rayleigh (*Proceedings of the Royal Society of London* **29**, 1129 (1879)). Dla drgania „podstawowego” (tj. o najniższej częstości) $A = \sqrt{8}/(2\pi) \approx 0{,}45$.

Metoda „drgającej kropli” jest stosowana do wyznaczania współczynnika napięcia powierzchniowego cieczy, np. ciekłych metali. Pomiar szybkości tłumienia drgań pozwala dodatkowo, w tym samym pomiarze, wyznaczyć także lepkość cieczy.



Rys. 3. Aproksymacja orbity

Analityczny dowód prawa pól

Współczesny dowód Twierdzenia I, standardowo przytaczany w podręcznikach fizyki, opiera się na pokazaniu, że wektor momentu pędu $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ciała o masie m poruszającego się w centralnym polu sił $\vec{f}$ nie zmienia się w czasie; jest to równoważne tezie Twierdzenia I.

Dowód jest następujący. Różniczkując $\vec{L}$ względem czasu, otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

gdyż $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$ oraz $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$, a iloczyn wektorowy wektorów współliniowych jest równy zeru. To oznacza, że wektor $\vec{L}$ jest niezmienny w czasie. Stałość jego zwrotu dowodzi *własności 1*, a stałość jego długości – *własności 2*.

Trudności interpretacyjne Principiów

Wobec nieostrości określeń w Twierdzeniu I, w jego dowodzie przedstawionym poniżej, a także w całych *Principiach*, Czytelnikowi należą się pewne wyjaśnienia. Otóż w swoim *opus magnum* Newton określa podstawowe pojęcia nie zawsze w tych miejscach, w których powinny być precyzyjnie zdefiniowane, według naszych standardów. Robi to jakby przy okazji, przeważnie tam, gdzie ich używa w subtelniejszych dowodach. Nierzadko trzeba rozszyfrowywać, jakie znaczenie danego określenia miał na myśli. Na przykład komentatorzy nie są zgodni, czy w podstawowym dla całej teorii drugim prawie ruchu siła jest *impulsowa,* czy *ciągła* [Pourciau, 2016]. Należy się wielu rzeczy doszukiwać z kontekstów rozrzuconych po całych *Principiach.* Dotyczy to też pojęcia siły użytego w powyższym twierdzeniu. Stąd właśnie, paradoksalnie, *Principia* są dziełem aktualnym, żywym i inspirującym, dziełem *otwartym.* Inspirują one każdą kolejną generację w nieco odmienny sposób, właśnie dzięki obecnym w nich możliwościach interpretacyjnych, „dziurach” czy pozornych sprzecznościach, oczywiście w połączeniu z rewolucyjnym charakterem samego dzieła. Notabene opisane wyżej własności *Principiów*, przełomowego dzieła naukowego, są wspólne także dla wielu najwybitniejszych dzieł religii, filozofii i literatury.

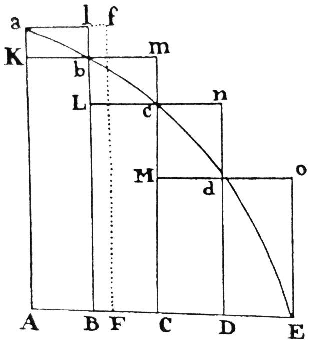
Na potwierdzenie faktu, że deszyfracja, bo tak trzeba nazwać odczytywanie *Principiów*, jest bardzo trudna nawet dla znawców przedmiotu, podajemy dwa konkretne przykłady. W artykule [Nauenberg, 1994] przedstawione są (wraz z obszernym komentarzem) dwie różne opinie dotyczące kwestii podstawowej: czy w *Principiach* znajduje się dowód, że prawo grawitacji Newtona implikuje orbity stożkowe? Natomiast w artykule autora z Δ^{10}_{20} zarysowana jest historia słynnego Lematu XXVIII w *Principiach*, dotyczącego niewspółmierności pola wycinka owalu i opisującej ten wycinek prostej, gdzie trwające ponad trzy stulecia zarzuty wobec jego dowodu znikają dopiero po zrozumieniu, co Newton uważał za owal.

W tym artykule skupimy się głównie na rozważaniach dotyczących *Własności 1.*

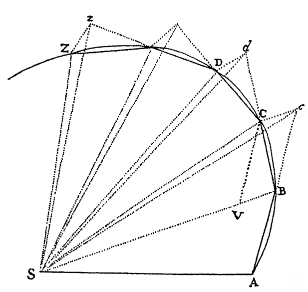
Dowód prawa pól w Principiach

Poniższy dowód Twierdzenia I, przedstawiony przez Newtona w *Principiach*, jest opatrzony rysunkiem 3.

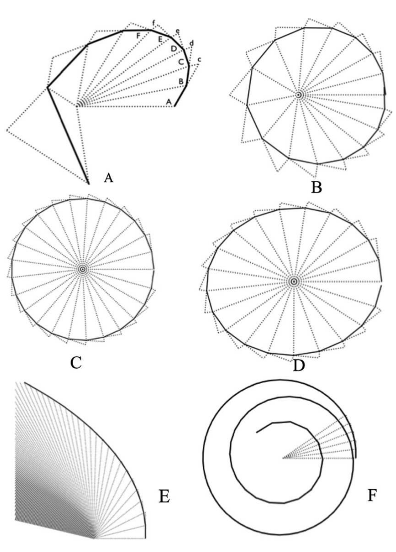
Załóżmy, że czas podzielono na jednakowe części i niech w pierwszej części tego czasu ciało – pod działaniem bezwładności (vis insita) – porusza się po odcinku AB. W drugiej części tego czasu, przy braku bodźca, ruch zostałby, na podstawie pierwszego prawa Newtona, podobnie przedłużony prosto do c wzdłuż odcinka Bc, równego odcinkowi AB, tak więc promienie AS, BS, cS, pociągnięte do centrum, wyznaczyłyby jednakowe powierzchnie ASB i BSc. Załóżmy jednakże, że gdy ciało pojawia się w B, działa na nie nagle mocny impuls siły dośrodkowej, który odchylając ciało z prostej linii Bc, zmusza je do kontynuowania ruchu wzdłuż prostej linii BC. Narysujmy odcinek cC równoległy do BS i przecinający się z BC w punkcie C. [Na mocy Wniosku 1 z Praw], na



Rys. 4. Rysunek do Lematu III, Księgi I, pokazujący aproksymację pola pod ciągłą krzywą przez sumę pól prostokątów w nią wpisanych i na niej opisanych.
W Lemacie III Newton dowodzi, że gdy podstawy tych prostokątów są coraz mniejsze, to obie sumy dążą (z dołu i z góry, odpowiednio) do pola pod krzywą a, c, E.



Rys. 5. Orbita i jej aproksymacja



Rys. 6. Aproksymacje orbit w polu siły centralnej proporcjonalnej.
(1) do $\frac{1}{r^2}$: (A) – diagram z *De Motu* Newtona rozszerzony o 4 dodatkowe impulsy, (B),(E) – orbity eliptyczna i hiperboliczna z centrum siły w ich ogniskach,
(2) do $\frac{1}{r^3}$: (F) – orbita spiralna ($\ln r = a\theta$),
(3) do r: (C) – orbita kołowa z centrum siły w środku okręgu, (D) – orbita eliptyczna z centrum siły w środku elipsy. [Nauenberg, 2018]

końcu drugiej części czasu ciało znajdzie się w C, we wspólnej płaszczyźnie z trójkątem ASB. Połączmy S i C i zauważmy, że skoro SB i Cc są równoległe, to powierzchnia trójkąta SBC będzie równa powierzchni trójkąta SBc i stąd równa też powierzchni trójkąta SAB. Z podobnych przyczyn, jeżeli siła dośrodkowa działa kolejno w punktach C, D, E itd. i zmusza ciało w każdej pojedynczej chwili czasu do zakreślania prostych odcinków CD, DE, EF itd., wszystkie one będą leżały w tej samej płaszczyźnie, a powierzchnia trójkąta SCD będzie równa powierzchni trójkąta SBC, powierzchnia SDE równa powierzchni SCD, powierzchnia SEF równa powierzchni SDE. I dlatego w jednakowych czasach są zakreślane jednakowe powierzchnie leżące w jednej nieruchomej płaszczyźnie i – na zasadzie łączenia – wszelkie sumy tych powierzchni, takie jak $SADS$, $SAFS$, mają się do siebie tak, jak czasy, w których są zakreślane. Niech teraz liczba tych trójkątów będzie zwiększona, a ich szerokość zmniejszona in infinitum. [Na podstawie Wniosku 4 z Lematu III] ich ostateczna zewnętrzna granica ADF będzie linią krzywą i dlatego siła dośrodkowa, przez którą ciało jest ustawicznie odciągane od stycznej do tej krzywej, będzie działała w sposób ciągły, a każda z zakreślonych powierzchni $SADS$, $SAFS$, które są zawsze proporcjonalne do czasów zakreślania, będzie – również w tym przypadku – proporcjonalna do tych czasów. Q.E.D. [Newton, 2015].

Od czasu publikacji *Principiów* dowód ten był i nadal jest komentowany, krytykowany lub broniony przez kolejnych autorów. Pierwsze zarzuty, jakie sformułowano wobec dowodu Twierdzenia I – poczynając od samego Edmonda Halleya, promotora *Principiów* – dotyczyły argumentu *przejścia do granicy* w jego końcowym fragmencie, rozpoczynającym się od słów *Niech teraz liczba tych trójkątów będzie zwiększona, a ich szerokość zmniejszona in infinitum.* Rzeczywiście, argumentacja Newtona jest tu dość enigmatyczna. Pewne uzupełnienie tego fragmentu dowodu zaproponowane jest w [Nauenberg, 2003].

Zastrzeżenia wobec dowodu *Własności 1*

Całkiem niedawno Bruce Pourciau [Pourciau, 2016] stwierdził, że w dowodzie jest luka natury logicznej i dotyczy własności „ruch odbywa się w nieruchomej płaszczyźnie”. Natomiast po przesunięciu tej własności z tezy do założeń Twierdzenia I dowód Newtona można już przedstawić precyzyjnie, dokonując niewielkich zmian i uzupełnień. Taka modyfikacja prawa pól oczywiście je osłabia. Gdybyśmy mogli poprosić Sir Isaaca o uzupełnienie jego własnego dowodu, może by nam pomógł, gdyż luka wygląda na istotną.

Zauważmy bowiem, że *nawet gdybyśmy nie wyrażali ewentualnych zastrzeżeń wobec argumentu przejścia do granicy*, to na podstawie odniesienia do Wniosku 4 z Lematu III w dowodzie Twierdzenia 1 oraz samego Lematu III opatrzonego rysunkiem 4 możemy wnioskować, iż Newton *milcząco założył*, że wielokąt A,B,C,D,E,F, … jest wpisany w ciągłą orbitę poruszającego się ciała. W takim razie sama orbita jest płaska, ale to właśnie należy pokazać. *Konstrukcja Newtona dotyczyłaby zatem tylko orbit płaskich* dających się aproksymować, w sensie pola, wielokątami w nie wpisanymi.

Czy Newton mógłby popełnić tak elementarny błąd? Wydaje się to mało prawdopodobne.

Szkic dowodu prawa pól w wersji osłabionej

Jak można doprecyzować powyższy dowód prawa pól przy założeniu, że orbity leżą w nieruchomych płaszczyznach? Pourciau zaproponował odpowiednie przeformułowanie dowodu [Pourciau, 2016], które tutaj zarysujemy.

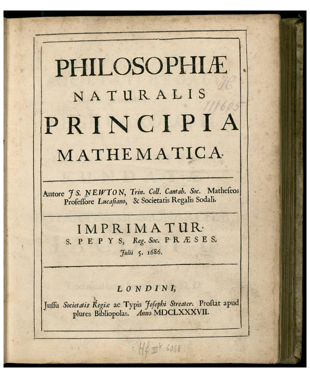
Należy zacząć od orbity. Niech pierwsze ciało porusza się w polu centralnym wokół punktu S, po płaskiej orbicie. Załóżmy, że w czasie od 0 do Δt pokonuje ono łuk AB (patrz rys. 5). Przyjmijmy teraz, że drugie ciało, identyczne z pierwszym, pokonuje w tym samym czasie drogę z A do B ruchem jednostajnym po odcinku. Gdyby pozostało bezwładne, w odstępie Δt pokonałoby odcinek Bc takiej samej długości. Załóżmy jednak, że w chwili Δt

działa na nie impuls siły dośrodkowej, zmieniając jego prędkość o wektor równoległy do SB w taki sposób, że odcinek BC pokonany w odstępie Δt kończy się ponownie na docelowej orbicie. Równość pól trójkątów SAB, SBc, SBC wynika wtedy z przystawania $AB \equiv Bc$ i równoległości $cC \parallel SB$. Podobnie każdy kolejny trójkąt zakreślony w odstępie Δt ma to samo pole.

Oczywiście i w tym przypadku konieczny jest odpowiedni argument przy przejściu do granicy $\Delta t \to 0$. Obszerne rozważania dotyczące tego punktu można znaleźć w [Pourciau, 2016], patrz także [Nauenberg, 2003, 2018].

Domysły dotyczące brakującej części dowodu Twierdzenia I

Wobec naszego przekonania, że Newton nie mógł popełnić opisanego wyżej elementarnego błędu logicznego, oraz wobec prostoty argumentów dowodu analitycznego narzuca się wręcz konstatacja, że być może brakująca część dowodu Twierdzenia I znalazła się w manuskrypcie *Principiów*, lecz Newton wykreślił stosowne uzasadnienia w momencie przekazywania dzieła do druku, uznawszy je ostatecznie za łatwe do uzupełnienia przez czytelników pokroju Huygensa i Leibniza. Należy tu zaznaczyć, że koszty druku tak obszernego dzieła były wysokie. Pokrył je osobiście Edmond Halley, gdyż Towarzystwo Królewskie było spłukane i mogło dać tylko swoje *imprimatur*, udzielone latem 1886 roku przez przewodniczącego Samuela Pepysa; jego nazwisko znajduje się dzięki temu na karcie tytułowej (rys. 7). To jednak tylko domysły, bowiem kluczowe arkusze manuskryptu *Principiów* nie zostały odnalezione. Należy też wziąć pod uwagę fakt, że w *Principiach* Newton stosował politykę ukrywania dowodów analitycznych stojących za konstrukcjami geometrycznymi. Koronnym przykładem jest jego dowód Wniosku III do Tezy XLI Zadania XXVIII.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

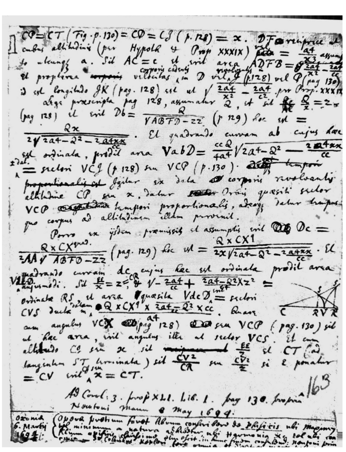
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Rys. 7. Strona tytułowa pierwszego wydania *Principiów*, Londyn 1687

Teza XLI. Zadanie XXVIII. *Zakładając siłę dośrodkową dowolnego rodzaju i przyjmując kwadratury figur krzywoliniowych, należy znaleźć zarówno krzywe, po których ciała będą się poruszać, jak i czasy ich ruchów po tak znalezionych krzywych* [Newton, 2015].

Ogólne relacje dotyczące krzywych i czasów, które otrzymał Newton, są równoważne reprezentacjom całkowym z współczesnych podręczników. Uwaga o kwadraturach dotyczy możliwości obliczenia całek. Po podstawieniu pod całkę danych dla newtonowskiego pola grawitacyjnego otrzymujemy krzywe stożkowe. We **Wniosku III** do tego twierdzenia Newton opisał też – w syntetycznej, geometrycznej formie – krzywe dla siły proporcjonalnej do odwrotności sześcianu odległości od centrum. Wymagało to obliczenia trudnych całek, których jednakże Newton nie uznał za stosowne przytoczyć. Zakończył za to swój dowód uwagą, która mogła sfrustrować każdego czytelnika.

„Wszystko to wynika z poprzedniej Tezy XLI na drodze kwadratury odpowiedniej krzywej, opis wyznaczania której, jako dostatecznie łatwy, dla zwięzłości opuszczę”. [Pask, 2013]



Rys. 8. Część listu Newtona napisanego do Davida Gregory'ego w 1694 r., wyjaśniającego, jak postępować w przypadku odwrotnego sześcianu użytego we Wniosku III

Collin Pask dodaje: *Nic dziwnego, że Newtonowi udało się zdenerwować tak wielu ludzi! Jedną z osób, które poprosiły Newtona o pomoc, był David Gregory, i w 1694 roku Newton napisał do niego, wyjaśniając, jak to działa. O dziwo, list przetrwał i widać (rys. 8), że Newton używa do przeprowadzania całkowania formy rachunku różniczkowego, która jest nam dzisiaj dobrze znana.*

Bibliografia

G. Łukaszewicz, M. Sierżęga, *Drugie prawo Keplera i owale Newtona. Kontrowersje wokół Lematu XXVIII w Principiach*, Delta 10, 2020.

M. Nauenberg, *Newton's Principia and Inverse-Square Orbits*, The College Mathematical Journal, vol. 25, 1994, 212–222.

M. Nauenberg, *Kepler's Area Law in the Principia: Filling in some details in Newton's proof of Proposition 1*, Historia Mathematica, Vol. 30, Issue 4, November 2003, 441–456.

M. Nauenberg, *Newton's graphical method for central force orbits*, Am. J. Phys., Vol. 86, No. 10, October 2018.

Isaac Newton, *Matematyczne zasady filozofii naturalnej*, Copernicus Center Press, 2015.

Colin Pask, *Magnificent Principia*, Prometheus Books, 2013.

B. Pourciau, *Instantaneous impulse and continuous force: the foundations of Newton's Principia*, 93–186, in The Cambridge Companion to Newton, wyd. 2, 2016.