Nie wiem, czy wiesz...

*Paweł Rafał BIELIŃSKI**

* Nauczyciel, Warszawa

W niniejszym tekście zapoznamy się z sytuacjami, w których interesującą rolę odgrywa wiedza lub niewiedza pojawiających się postaci. Istotna może być też ich wiedza o niewiedzy innych itd. Prezentowane scenariusze to właściwie zagadki, w związku z tym najwięcej radości można uzyskać, próbując rozwiązać je samodzielnie przed przeczytaniem wyjaśnienia.

Geniusze

Dwóm geniuszom wręczono – w wielkiej tajemnicy – po jednej liczbie naturalnej, przy czym wiadomo było, że są to liczby różniące się dokładnie o 1. Geniusze siedzą naprzeciwko siebie i na zmianę zadają sobie nawzajem pytanie: „Czy znasz moją liczbę?”. Uzasadnij, że prędzej czy później padnie odpowiedź twierdząca.

W przekonaniu autora, a więc i w tekście, 0 zalicza się do liczb naturalnych.

Wyjaśnienie. Geniusza, który jako pierwszy zadaje pytanie, nazwijmy Alojzem, a drugiego – Bernardem. Gdyby Bernard miał liczbę 0, to znałby liczbę Alojza. Istotnie, jedyną liczbą naturalną sąsiadującą z zerem jest 1. Zatem, odpowiadając negatywnie, Bernard podaje do publicznej informacji, że jego liczbą nie jest 0. Podobnie zapytany wówczas Alojz, jeśli nie odpowie twierdząco, to ujawnia informację, iż jego liczba nie jest równa 0. Analogicznie, kolejne dwie negatywne odpowiedzi wykluczają u obu geniuszy liczbę 1, a jeszcze kolejne – liczbę 2 itd. Ogólnie, po $2n$ pytaniach jest wiadomo, że nie jest możliwa żadna liczba mniejsza niż n. Jeżeli więc geniuszom wręczono liczby n oraz $n+1$, to nie później niż w tym momencie geniusz z mniejszą liczbą musi odpowiedzieć twierdząco. Istotnie, od początku wiedział, że drugi geniusz ma albo liczbę $n-1$, albo $n+1$, a pierwsza z nich została już wykluczona.

Niedzielni Wikingowie

Na odległej wyspie mieszkało dwustu Wikingów, o których powszechnie wiadomo, co następuje.

1) Każdy Wiking jest mistrzem logiki.
2) Każdy z nich jest bohaterem albo tchórzem. Te dwa rodzaje Wikingów będziemy określać *typami*, a samą cechę – *dzielnością*.
3) Żaden z nich nie zna swojego typu. (Z własnej perspektywy nawet paniczna ucieczka może przypominać błyskotliwe natarcie, a zeznania kolegów nie muszą być wiarygodne).
4) Każdy zna typ każdego z pozostałych. (Patrząc trzeźwo, da się odróżnić paniczną ucieczkę od błyskotliwego natarcia).
5) Wiking, który w jakiś sposób wywnioskuje, że jest tchórzem, przy najbliższym zachodzie słońca odpłynie samotnie, by zdobywać chwałę w nieznanych krainach.

Pewnego dnia, kiedy wszyscy Wikingowie przebywali w sali biesiadnej, ukazał się tam Godny Zaufania Odyn, który oznajmił im, że nie wszyscy są bohaterami. Przez pewien czas skutki objawienia nie ujawniały się, dopiero setnego dnia grupa zhańbionych Wikingów odpłynęła w siną dal. Ilu bohaterów mieszkało na wyspie?

W wyniku omawianych zdarzeń żaden z Wikingów nie doznał uszczerbku na zdrowiu. Każdy prędko wrócił ze swojej wyprawy, bo czegoś się tam przestraszył.

Wyjaśnienie. Rozwiązanie tej zagadki okazuje się zaskakująco podobne do poprzedniego.

Przypuśćmy, że na wyspie żył tylko jeden tchórz. Taki Wiking wiedziałby, że wszyscy pozostali są bohaterami, a więc z informacji od Odyna wywnioskowałby swój typ i odpłynął. W takim razie już drugiego dnia (tzn. nazajutrz od objawienia) staje się powszechnie wiadomym, że tchórzy na wyspie jest co najmniej dwóch. Ogólnie, jeżeli dnia n-tego było wiadomo, że tchórzy jest co najmniej n, to musi zdarzyć się jedna z dwóch rzeczy.

A) Jeśli tchórzy jest dokładnie n, to każdy z nich wie o $n-1$ tchórzach wśród pozostałych Wikingów. Potrafi więc wywnioskować, że sam jest tchórzem, i uda się na wyprawę. Dotyczy to każdego Wikinga tchórzliwego typu, skąd wynika, że numer dnia jest równy liczbie tchórzy.

Również bohaterowie mogą odetchnąć z ulgą dopiero w dniu masowego wypłynięcia mniej dzielnych Wikingów.

B) Jeżeli tchórzy jest więcej niż n, to nikt nie może ustalić swojego typu, więc nie wyrusza na wyprawę. Wobec A) oznacza to jednak, że dnia $n+1$ wszyscy już wiedzą, że liczba tchórzy wynosi co najmniej $n+1$.

Widzimy więc, że na wyspie musiało żyć dokładnie stu tchórzy, a więc także stu bohaterów... oczywiście zakładając, że informacja przekazana przez Odyna była zgodna z prawdą. Uzupełnienie tej luki stanowi treść jednego z zadań.

Historia ta jest o tyle intrygująca, że Odyn na pozór nie podał Wikingom żadnej nowej informacji. Każdy przecież dobrze wiedział, że w ich gronie są tchórze. Jest to pewien paradoks, który, zdaniem autora, można jednak rozwiązać.

Żeby lepiej zrozumieć istotę tego niecodziennego zjawiska, wyobraźmy sobie wyspę, na której mieszkało tylko dwóch tchórzy.

Omówiona tu sytuacja jest nieco zawiła, ale wierzymy w Czytelnika.

Wówczas rzeczywiście każdy wie o obecności tchórzy, ale pierwszy tchórz nie wie, że drugi wie! I właśnie tego dowiedziałby się dzięki objawieniu. Jeżeli tchórzy byłoby trzech, powiedzmy Alaf, Belaf i Celaf, to np. Alaf wie, że Belaf wie o obecności tchórzy, ale nie ma podstaw sądzić, że Belaf wie, że Celaf wie. Istotnie, Alaf, nie znając swojego typu, musi się liczyć z możliwością, że jedynymi tchórzami są Belaf i Celaf (a wówczas Belaf nie wiedziałby, że Celaf wie). Analogicznie uzasadniamy, że choć początkowo każdy wiedział o obecności tchórzliwych Wikingów, to dopiero po objawieniu stało się to *wiedzą powszechną*. To znaczy, że nie tylko każdy o tym wie, ale też każdy wie, że każdy wie, oraz każdy wie, że każdy wie, że każdy wie, i tak dalej... Ponadto każdy wie, w której chwili się ta wiedza upowszechniła. Dzięki temu możliwe jest przeprowadzenie przez mieszkańców wyspy całego opisanego powyżej rozumowania.

Zauważmy jeszcze, że do uruchomienia przedstawionej reakcji łańcuchowej wystarczyłoby podanie do publicznej wiadomości prostego wniosku ze stwierdzenia „są wśród nas tchórze i od teraz powszechnie o tym wiadomo", mianowicie: „jeśli wśród nas jest tylko jeden tchórz, to odpłynie dziś". Jest on wart wypowiedzenia, bo eksponuje znaczenie czasu i rozumowania nie wprost.

Córki

Rozmowa dawnych przyjaciół w autobusie:

– Kiedy ostatnio się widzieliśmy, byłeś krótko po ślubie. Doczekałeś się już dzieci?
– Owszem, mam trzy córki.
– Wspaniale! W jakim wieku?
– Iloczyn ich wieków, w latach, wynosi 36, a suma ich wieków jest równa liczbie pasażerów tego autobusu.
– Rozumiem, ale nadal nie wiem, ile mają lat.
– Najstarsza gra na pianinie.
– OK, teraz już wiem!

Ile lat mają rzeczone córki?

Wyjaśnienie. Liczba 36 jest iloczynem trzech liczb naturalnych na zaledwie kilka sposobów. Wypiszmy je, notując od razu sumy owych czynników.

$36 = 1 \cdot 1 \cdot 36$, suma 38
$36 = 1 \cdot 2 \cdot 18$, suma 21
$36 = 1 \cdot 3 \cdot 12$, suma 16
$36 = 1 \cdot 4 \cdot 9$, suma 14
$36 = 1 \cdot 6 \cdot 6$, suma 13
$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9$, suma 13
$36 = 2 \cdot 3 \cdot 6$, suma 11
$36 = 3 \cdot 3 \cdot 4$, suma 10

Zauważmy, że dla uczestników rozmowy liczba pasażerów jest znana. Mimo to ustalenie wieków córek nie było od razu możliwe. Oznacza to, że pasażerów musiało być 13, ponieważ każda inna suma odpowiada tylko jednemu rozkładowi liczby 36 na czynniki.

Przy okazji, kiedy ci dwaj przyjaciele widzieli się poprzednim razem?

Biorąc to pod uwagę, rozumiemy już, w jaki sposób wtręt dotyczący gry na pianinie pozwolił ustalić wiek każdej z córek: istnienie *najstarszej* wyklucza rozkład $1 \cdot 6 \cdot 6$, pozostawiając tylko $2 \cdot 2 \cdot 9$.

A ty wiesz? (rozwiązania części zadań na str. 19)

1. Popraw rozumowanie przedstawione w wyjaśnieniu zadania „Geniusze", aby uzasadnić, że twierdząca odpowiedź musi paść nie później niż w $(n+2)$-gim pytaniu (n nadal jest mniejszą z tajemniczych liczb).

Dziękuję Wojciechowi Przybyszewskiemu za zwrócenie mojej uwagi na fakt opisany w zadaniu 1.

2. Dwóm geniuszom wręczono – w wielkiej tajemnicy – po jednej liczbie naturalnej, przy czym wiadomo, że są to liczby różniące się o: a) co najwyżej 3; b) dokładnie 3. Geniusze siedzą naprzeciwko siebie i na zmianę zadają sobie nawzajem pytanie: „Czy znasz moją liczbę?". Czy jest pewne, że w końcu padnie twierdząca odpowiedź?

3. Przypomnijmy sobie scenariusz zadania „Niedzielni Wikingowie". Nadal jawnie obowiązują zasady 1)–5), a ponadto wiadomo, że grupa Wikingów wypłynęła setnego dnia po objawieniu. Uzasadnij, że deklaracja Odyna była zgodna z prawdą.

4. Przypomnijmy sobie scenariusz zadania „Niedzielni Wikingowie". Jak zmieniłby się przebieg wydarzeń, gdyby któregoś dnia trzech Wikingów wybrało się na niezwiązaną z hańbą wyprawę trwającą trzy tygodnie? Ustal, jak odpowiedź zależy od numeru dnia i liczby tchórzy w owej trójce.

5. Podaj przykład liczby, którą można by zastąpić 36 w zadaniu „Córki".

6. Na niewielkiej wyspie mieszka n = wiele racjonalnych i genialnych lwów. Lew nigdy nie zje innego lwa i jest w stanie przeżyć, jedząc drobne wyspiarskie zwierzątka. Najsmaczniejsza jest jednak zaczarowana koza, która jako stworzenie bezbronne i pozbawione instynktu samozachowawczego znakomicie nadaje się na przystawkę. Kłopot w tym, że lew, który pożarłby zaczarowaną kozę, sam się w nią zamieni. Lwy nie mają nic przeciwko byciu kozą, natomiast bycie szybko zjedzoną kozą nie jest perspektywą ani trochę atrakcyjną. Znajdź wszystkie wartości liczby n, dla których koza zostanie zjedzona.