Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2024

Zadania z fizyki nr 770, 771

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

770. Z izolowanego cieplnie naczynia o objętości wewnętrznej V odpompowano wypełniający je gaz, osiągając wysoką próżnię. Otaczające powietrze ma temperaturę T_0 i ciśnienie p_0. W pewnym momencie otworzono kran zamykający naczynie, i nastąpiło jego szybkie napełnienie powietrzem atmosferycznym. Jaką temperaturę T miało powietrze w naczyniu po jego napełnieniu i zamknięciu kranu? Powietrze traktujemy jako gaz doskonały, którego wykładnik adiabaty $\gamma = c_p/c_V$ jest dany, pojemności cieplnej ścianek naczynia nie uwzględniamy.

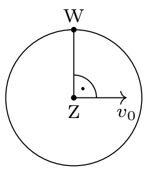
771. Cząstkę punktową o masie m i ładunku Q umieszczono w odległości R od nieskończonej płaszczyzny przewodzącej i puszczono swobodnie. Po jakim czasie cząstka doleci do płaszczyzny? Siły ciężkości nie uwzględniamy.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2023

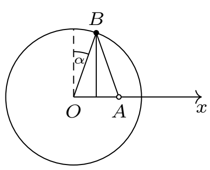
Przypominamy treść zadań:

762. Przekształcenie fotonu w parę elektron–pozyton w próżni jest niemożliwe, ze względu na zasadę zachowania pędu. Znaleźć minimalną energię, jaką powinien posiadać foton, aby mogła powstać para elektron–pozyton w pobliżu spoczywającego elektronu.

763. Na poziomej powierzchni lodu narysowany jest okrąg o promieniu $R = 10$ m. W chwili początkowej zając Z znajduje się w środku okręgu, a wilk W na okręgu, jak na rysunku 1. Zając porusza się po prostej z prędkością $v_0 = 2$ m/s. Wilk powinien poruszać się po okręgu tak, aby odległość między nim a zającem nie zmieniała się. Do jakiego punktu na okręgu uda mu się w ten sposób dotrzeć? Współczynnik tarcia wilka o lód: $\mu = 0{,}05$. Wilk nie podskakuje.



Rys. 1



Rys. 2

762. Rozważmy układ odniesienia, w którym spoczywa środek masy wszystkich trzech cząstek – wyjściowego elektronu i tworzącej się pary elektron–pozyton. W tym układzie energia całkowita będzie najmniejsza, jeśli wszystkie te cząstki będą spoczywały. W układzie laboratoryjnym odpowiada to sytuacji, gdy wszystkie cząstki po utworzeniu się pary mają jednakowe wektory prędkości. Masy cząstek są jednakowe, zatem jednakowe są też ich wektory pędu. Pęd fotonu przed powstaniem pary zostaje rozdzielony równo pomiędzy trzy cząstki w stanie końcowym: $p_f = 3p$, gdzie p jest pędem każdej z nich. Z zasady zachowania energii:

$$p_f c + mc^2 = \sqrt{p_f^2 c^2/9 + m^2c^4},$$

gdzie m jest masą elektronu. Stąd szukana energia progowa fotonu wynosi $4mc^2$.

763. Załóżmy, że w pewnej chwili zając znajduje się w punkcie A (rys. 2). Zgodnie z treścią zadania wilk powinien znajdować się w tej chwili w punkcie B – wierzchołku trójkąta równoramiennego OAB. Wilk przemieszcza się w kierunku osi OX ze stałą prędkością $v_0/2$, zatem jego przyspieszenie a ma kierunek wysokości trójkąta OAB, a jego prędkość wypadkowa jest styczna do okręgu i wynosi $V = (v_0/2)\cos\alpha$. Przyspieszenie dośrodkowe $a_d = V^2/R = a\cos\alpha$, stąd $a = v_0^2/4R\cos^3\alpha$. Z drugiej strony $a = T/M \leqslant \mu g$, gdzie M jest masą wilka, a T siłą tarcia statycznego. Maksymalny kąt opisujący punkt na okręgu, do którego może dotrzeć wilk, określa równanie $\cos\alpha_0 = \sqrt[3]{v_0^2/4R\mu g} \approx 0{,}59$, stąd $\alpha_0 \approx 54°$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
760 ($WT = 2{,}6$), 761 ($WT = 1{,}83$)
z numeru 6/2023

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2–40,56
Jacek Konieczny	Poznań	38,28
Tomasz Wietecha	Tarnów	16–37,54
Konrad Kapcia	Poznań	2–35,60
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1–29,40
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–20,97
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5–20,95

Rozwiązanie zadania F 1088. Dla układu dwóch ciał o masach m i M trzecie prawo Keplera podaje związek okresu T ich wzajemnego obiegu z wielką osią orbity a oraz stałą grawitacji G:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}.$$

Gdy $m \ll M$, to w powyższym wzorze może zostać pominięte. Otrzymujemy wtedy związek:

$$M = A\frac{a^3}{T^2},$$

w którym $A = 4\pi^2/G$ jest „uniwersalną” stałą. Możemy teraz łatwo wyznaczyć poszukiwane stosunki mas:

$$\frac{M_S}{M_Z} = \frac{a_Z^3 T_K^2}{a_k^3 T_Z^2} \approx 331\,000, \quad \frac{M_J}{M_Z} = \frac{a_C^3 T_K^2}{a_K^3 T_C^2} \approx 316.$$

W każdym z wymienionych układów obserwowane rozmiary satelity są znacznie mniejsze od rozmiarów ciała centralnego. Można więc przyjąć, że także masy satelitów są znacznie mniejsze od mas obieganych ciał centralnych.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2024

Zadania z matematyki nr 873, 874

Redaguje Marcin E. KUCZMA

873. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech ℓ będzie dowolną prostą przecinającą boki AB i AC odpowiednio w takich punktach P i Q, że $\sphericalangle ACP + \sphericalangle APQ = 90°$, i niech X będzie rzutem prostokątnym punktu C na prostą ℓ. Udowodnić, że (dla ustalonego trójkąta ABC) wszystkie punkty X, uzyskane w ten sposób przy różnych dopuszczalnych położeniach prostej ℓ, leżą na jednej prostej.

874. Liczba $\sqrt{7}$ została zapisana w systemie dwójkowym jako $10,c_1c_2c_3\ldots$; to znaczy $\sqrt{7} = 2^1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i 2^{-i}$, $c_i \in \{0,1\}$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ suma $\sum_{i=n}^{2n} c_i$ jest dodatnia.

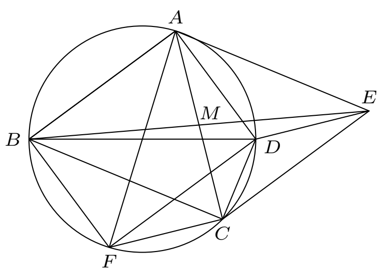
Zadanie 874 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2023

Przypominamy treść zadań:

865. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach A i C są proste (ale nie przy wierzchołkach B i D). Punkt M jest środkiem przekątnej AC. Punkt E jest symetryczny do B względem M. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i ADE są przystające.

866. Dane są dwie różne liczby pierwsze p, q takie, że $2^p - 1$ oraz $2^q - 1$ też są liczbami pierwszymi, a ponadto każda z liczb $2^{p-1} - 1$ oraz $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pq. Udowodnić, że jeżeli liczba całkowita dodatnia d jest dzielnikiem liczby $2^{pq} - 1$, to liczba $d - 1$ dzieli się przez pq.



865. Punkty A i C leżą na okręgu o średnicy BD. Niech F będzie punktem antypodycznym do A na tym okręgu; odcinek AF też jest jego średnicą, więc czworokąt $ABFD$ jest prostokątem. Odcinki AC i BE mają wspólny środek M, co oznacza, że czworokąt $ABCE$ jest równoległobokiem. Zatem $AE = BC$, $AD = BF$; dostajemy też związki równoległości $AE \| BC$ oraz $AD \| BF$. Wynika z nich, że $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FBC$ (punkty C i F nie pokrywają się, bowiem – z założenia – kąty ABC i CDA nie są proste; z tego samego powodu nie pokrywają się punkty D i E).

Z uzyskanych zależności wnosimy, że trójkąty DAE i FBC są przystające; zatem i okręgi na nich opisane są przystające. Pozostaje zauważyć, że okrąg FBC jest też opisany na trójkącie ABC.

866. Rozważmy najpierw przypadek, gdy d jest liczbą pierwszą (nieparzystą, skoro dzieli liczbę $2^{pq} - 1$). Niech t będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, dla której $2^t \equiv 1 \pmod{d}$. Ponieważ (z założenia) $2^{pq} \equiv 1 \pmod{d}$, zatem pq dzieli się przez t.

Możliwe są trzy podprzypadki: $t = pq$ lub $t = p$ lub $t = q$. W myśl małego twierdzenia Fermata $2^{d-1} \equiv 1 \pmod{d}$, zatem także wykładnik $d - 1$ dzieli się przez t. W podprzypadku $t = pq$ jest to teza zadania.

W podprzypadku $t = p$ liczba d jest dzielnikiem liczby $2^p - 1$ (która z założenia jest pierwsza); to znaczy, że $d = 2^p - 1$. Stąd $d - 1 = 2(2^{p-1} - 1)$. To znów daje tezę, bo czynnik w nawiasie jest (z założenia) podzielny przez pq. Dla $t = q$ rozumowanie biegnie tak samo.

Pozostaje przypadek ogólny – gdy $d = d_1 \ldots d_n$ (iloczyn liczb pierwszych, niekoniecznie różnych). Założenie $d \mid 2^{pq} - 1$ implikuje, że $d_i \mid 2^{pq} - 1$ dla wszystkich i. Na mocy przypadku już rozpatrzonego: $d_i \equiv 1 \pmod{pq}$ dla wszystkich i. Stąd $d \equiv 1 \pmod{pq}$ – czyli teza w przypadku ogólnym.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 863 ($WT = 2{,}33$) i 864 ($WT = 2{,}40$) z numeru 6/2023

Krzysztof Maziarz	Londyn	44,68
Radosław Kujawa	Wrocław	43,57
Paweł Najman	Kraków	43,16
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Marek Spychała	Warszawa	40,20
Janusz Fiett	Warszawa	39,62
Jerzy Cisło	Wrocław	37,70
Paweł Kubit	Kraków	36,11
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	35,26

Pan Krzysztof Maziarz (niegdyś z Jasła, potem z Krakowa, teraz z Londynu) zgromadził był do końca roku 2021 saldo 40,67p., po czym się chwilowo z nami rozstał; jego nazwisko wkrótce zniknęło z publikowanej czołówki. Ale oto wrócił – i od razu zgrabnym ruchem przeskoczył 44 p., dołączając tym samym do matematycznego Klubu 44.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.