Jak dotąd jest dobrze

*Bartłomiej PAWLIK**

* Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska

Dziwaczna i zachwycająca chemia audioaktywnego rozkładu. Jedną z popularniejszych rekreacyjnych sekwencji liczbowych jest ciąg *look-and-say* wprowadzony przez Johna Conwaya w 1986 roku:

$$1,\ 11,\ 21,\ 1211,\ 111221,\ 312211,\ 13112221,\ \ldots$$

J. H. Conway, *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay.*

Czytelnikowi, który widzi powyższy ciąg po raz pierwszy, sugeruję na chwilę zatrzymać lekturę i zastanowić się, jaka powinna być następna liczba.

Nazwa *look-and-say* idealnie oddaje istotę ciągu – każdy kolejny wyraz powstaje przez opisanie tego, co widzimy, patrząc na wyraz poprzedni. Przykładowo, patrząc na piąty wyraz ciągu (111221), widzimy trzy (**3**) jedynki (**1**), dwie (**2**) dwójki (**2**) i jedną (**1**) jedynkę (**1**), więc kolejny wyraz to **312211**. Rzeczona autodeskrypcyjność stanowi największy urok ciągu Conwaya: wyznaczenie kolejnych wyrazów nie ma nic wspólnego z niedostępną dla niewtajemniczonych matematyką wyższą. Można się nawet pokusić o przypuszczenie, że spostrzegawczy laik ma większe szanse na odgadnięcie reguły rządzącej ciągiem niż doświadczony matematyk. Moda na ciąg Conwaya nie ominęła *Delty*, na łamach której w ostatnich latach pojawiły się warte uwagi teksty traktujące o *look-and-say*: w Δ^{11}_{21} o najważniejszych własnościach pisze Wojciech Czerwiński, a w Δ^{1}_{23} można znaleźć bardziej szczegółowy tekst Karola Gryszki.

Sam John Conway przyznał, że nie udało mu się odgadnąć reguły rządzącej ciągiem, gdy ten został mu przedstawiony w formie zagadki przez jednego ze studentów. Należy tutaj dodać, że *look-and-say* jest nazywany *ciągiem Conwaya*, ponieważ rzeczony matematyk jako pierwszy ten ciąg *zbadał*, a nie *odkrył*.

Jak dotąd jest dobrze. Bohaterem niniejszego artykułu jest pewien mniej znany ciąg autodeskrypcyjny, który zadebiutował w OEIS (*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* – bardzo przydatna baza ciągów) w 2005 roku jako wytwór Erica Angeliniego – belgijskiego pasjonata matematyki rekreacyjnej. Zanim przedstawimy sam ciąg, przyjmijmy następującą konwencję dekodowania liczb. Niech $N \geqslant 10$. Liczba powstała przez „odcięcie” ostatniej cyfry liczby N (czyli część całkowita liczby $N/10$) będzie oznaczać *ilość*, a ostatnia cyfra liczby N (czyli reszta z dzielenia N przez 10) będzie oznaczała samą siebie, czyli – nomen omen – *cyfrę*. Liczbę N dekodujemy jako odpowiednią *ilość* tej *cyfry*.

Przykładowo 26 dekodujemy jako *dwie cyfry „6”*, a 8945 jako *osiemset dziewięćdziesiąt cztery cyfry „5”*.

Sekwencja *true-so-far* jest rosnącym ciągiem liczb całkowitych, którego pierwszym elementem jest liczba 10, a każdy kolejny to najmniejsza liczba, która po zdekodowaniu poprawnie opisuje liczbę wystąpień danej cyfry we wszystkich dotychczasowych elementach ciągu (łącznie z wprowadzonym). Zatem drugim elementem ciągu nie może być liczba 11 (11 dekodujemy jako *jedna „jedynka”*, podczas gdy ciąg $(10, 11)$ zawiera trzy jedynki!), natomiast liczba 12 tak (ciąg $(10, 12)$ faktycznie zawiera jedną cyfrę „2”). Sto początkowych elementów ciągu *true-so-far* to:

10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25,
26, 27, 28, 29, 30, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 45,
46, 47, 48, 49, 50, 56, 57, 58, 59, 60, 67, 68, 69,
70, 78, 79, 80, 89, 90, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108,
109, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 123, 124, 125, 126,
127, 128, 129, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 145, 146, 147, 148,
149, 156, 157, 158, 159, 167, 168, 169, 178, 179, 180, 189, 190,
192, 193, 194, 195, 196, 197, 203, 204, 205.

Ostatnia z zapisanych powyżej liczb, 205, informuje, że w tabeli znajduje się dokładnie dwadzieścia cyfr „5”.

Czy rozpatrywany ciąg jest nieskończony? Odpowiedź uzyskamy, łącząc liczenie na palcach (komputerowych) z prostym rozumowaniem.

Jak się okazuje, po otrzymaniu **dwa tysiące dwudziestego czwartego** elementu ciągu *true-so-far* – 8945 – liczby wystąpień poszczególnych cyfr są następujące:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
624	822	834	864	874	894	779	697	697	617

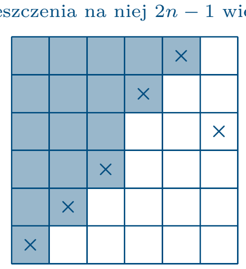
Rozwiązanie zadania M 1770.
Odpowiedź: $2n - 1$.

Pokażemy najpierw, że nie jest możliwe, aby wszystkie wieże znalazły się w jednej części. Zauważmy na początku, że w każdym wierszu oraz kolumnie znajduje się dokładnie jedna wieża. Niech A, B, C, D będą kolejnymi narożnikami szachownicy. Z symetrii wynika, że pola A i C muszą należeć do różnych części, tak samo jak B i D. Oznacza to, że albo A i B, albo A i D leżą w jednej części, a pozostałe dwa narożniki znajdują się w drugiej części.

Bez straty ogólności załóżmy, że narożniki A i B leżą w tej samej części. Wtedy wszystkie pola między nimi również muszą leżeć w tej części. Istotnie, jeśli pole X leży w części drugiej, to istnieje pewna ścieżka z X do C, a ponadto w części pierwszej znajduje się jeszcze ścieżka z A do B. Wtedy te ścieżki dzielą wspólne pole, co jest niemożliwe.

Oznacza to, że cały bok A-B szachownicy leży w pierwszej części, a zatem jedna z wież także. Dokładnie tak samo dowodzimy, że w drugiej części także znajduje się co najmniej jedna wieża. Oznacza to, że w jednej części nie mogą znajdować się wszystkie wieże.

Następujący przykład pokazuje odpowiedni sposób podziału szachownicy i rozmieszczenia na niej $2n - 1$ wież.



Wieże znajdują się na polach (i, i) dla $i \leqslant n$, $(i, i+1)$ dla $n < i \leqslant 2n - 1$ oraz na polu $(2n, n+1)$.

Kolejny, dwa tysiące dwudziesty piąty element ciągu musi mieć zakodowaną liczność jednej z dziesięciu cyfr. Zauważmy, że nie może on odnosić się do cyfry „5”: liczba 8955 nie pasuje, gdyż zwiększa liczbę piątek o dwie, a nie o jedną; podobnym argumentem odrzucamy liczbę 8965 (oczywiście większych kandydatów nie ma sensu rozpatrywać).

Analogicznie można uzasadnić, że kolejny element nie może mieć na końcu cyfry 8. Pozostali kandydaci to:

$$6250,\ 8231,\ 8352,\ 8653,\ 8754,\ 7806,\ 6987,\ 6189 \text{ i } 6199,$$

jednak odrzucamy każdą z tych propozycji ze względu na założenie, że rozpatrywany ciąg ma być rosnący – każda z dziewięciu powyższych liczb jest mniejsza od 8945. Ostatecznie ciąg *true-so-far* ma dokładnie **2024** elementy.

Pod koniec powyższego uzasadnienia skończoności powołaliśmy się na monotoniczność rozpatrywanego ciągu. Jak się okazuje, *true-so-far* ma skończoną liczbę elementów również w wariancie, w którym nie zakładamy, że jest rosnący. Jednak liczba elementów tej wersji ciągu przez długi czas nie da nam dobrego pretekstu do przedstawienia go na łamach *Delty* – zgodnie z informacją zamieszczoną w bazie OEIS wynosi ona 5 191 475.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1768. Liczba całkowita n jest taka, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y i z. Udowodnić, że równanie

$$x^2 + y^2 - xy = n$$

ma rozwiązanie w postaci pary liczb całkowitych x, y.
Rozwiązanie na str. 7

M 1769. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których istnieją takie parami różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że liczba

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}$$

jest całkowita.
Rozwiązanie na str. 4

M 1770. Dana jest liczba całkowita dodatnia n. Na szachownicy $2n \times 2n$ w taki sposób rozmieszczono $2n$ wież, aby żadne dwie z nich nie znajdowały się w tym samym rzędzie lub w tej samej kolumnie. Następnie tablicę przecięto wzdłuż linii rozdziału pól na dwie spójne części symetryczne do siebie względem środka tablicy. Jaka jest maksymalna liczba wież, które mogą znajdować się w jednej z takich części?
Rozwiązanie na str. 1

Uwaga: Fragment tablicy nazwiemy spójnym, jeśli jest możliwe przejście w obrębie tego fragmentu między dowolnymi jego polami, za każdym razem przechodząc do pól sąsiadujących bokiem.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1087. Kropla nieściśliwej cieczy została pobudzona do małych drgań polegających na zmianach kształtu względem kształtu sferycznego. Jak częstość f tych drgań zależy od napięcia powierzchniowego cieczy γ, jej gęstości ρ oraz promienia kropli r?
Rozwiązanie na str. 9

F 1088. W jaki sposób Newton, na podstawie znanych w jego czasach rozmiarów wielkich półosi orbit i okresów obiegu Ziemi wokół Słońca, Księżyca wokół Ziemi oraz Callisto wokół Jowisza, mógł wyznaczyć stosunek masy Słońca M_S i masy Jowisza M_J do masy Ziemi M_Z?
Potrzebne dane: okres obiegu Ziemi $T_Z = 365{,}26$ dni, wielka półoś orbity $a_z = 149{,}598 \cdot 10^6$ km; okres obiegu Księżyca $T_K = 27{,}32$ dni, wielka półoś $a_K = 0{,}384 \cdot 10^6$ km; okres obiegu Callisto $T_C = 16{,}69$ dni, półoś $a_C = 1{,}883 \cdot 10^6$ km – wartości znane współcześnie.
Rozwiązanie na str. 20