Czy Newton wiedział? Statystyczna tajemnica skrzyni Pyx

*Jan MIELNICZUK**

*Instytut Podstaw Informatyki PAN, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

Pyxem (*the Pyx*) nazwano w średniowiecznej Anglii skrzynię, do której odkładano egzemplarze monet wytłoczonych przez londyńską Mennicę (*The Mint*) w celu późniejszej ich inspekcji (*Trial of the Pyx*). Nazwa wywodzi się od greckiego słowa *pyxus*, oznaczającego właśnie skrzynię. Pierwsza publiczna inspekcja skrzyni odbyła się w 1248 roku, a z 1279 roku pochodzi zachowany edykt Edwarda I opisujący całą procedurę. Do połowy XIX wieku Mennica była instytucją niezależną od Korony i funkcjonowała na podstawie kontraktu z monarchą (*Mint Indenture*). Kontrakt specyfikował zobowiązania Mennicy i wynagrodzenie jej pracowników za bicie monet. Przewidywał on tłoczenie monet o określonej jakości i wadze z kruszcu dostarczanego przez króla. Co ciekawe i ważne dla tej historii, prawo dostarczania złota w celu bicia monet przysługiwało, za opłatą, kupcom będącym importerami złota lub złotych monet (np. francuskich luidorów czy niderlandzkich guldenów). W celu weryfikacji jakości monet codziennie jeden losowo wybrany z produkcji egzemplarz trafiał do Pyxa. Zbiorcza inspekcja monet zgromadzonych w skrzyni była przeprowadzana w nieregularnych odstępach czasowych, co 2–4 lata, a często dopiero wtedy, gdy skrzynia była pełna. Sama inspekcja była dokonywana przez reprezentantów niezależnej od króla gildii złotników, w obecności monarchy lub jego przedstawiciela. Jeśli zakończyła się pomyślnie, całą kontrolę wieńczyła, przypuszczalnie daleka od wegetariańskiej, uczta.

Sam proces bicia (tłoczenia) monet był skomplikowany technologicznie i wymagał od tłoczących dużej umiejętności i wprawy. Jak pisze John Craig [1], *niewielu z nich było tak zręcznych, żeby zachować wszystkie swoje palce w nieskończoność.*

Sprawdzanie jakości monet. Proces kontroli jakości monet obejmował kontrolę próby złota (procentowej zawartości kruszcu w monecie) oraz kontrolę ich wagi. Kontrola wagi polegała na sprawdzeniu, czy łączna waga monet w skrzyni mieści się w dopuszczalnych granicach dla takiej ich liczby. Jakie były te dopuszczalne granice? Omówimy to na przykładzie złotych gwinei, które były emitowane od XVII wieku do początku XIX. Na potrzeby tego artykułu określmy tolerancję jako maksymalną dopuszczalną odchyłkę (w górę lub w dół) od nominalnej wagi. Nominalna waga jednej gwinei wynosiła 129 ziaren (*grains*). Dopuszczalna tolerancja na złotych gwineach o łącznej nominalnej wadze 1 funta (chodzi tu o tzw. funt jubilerski, *troy pound*) wynosiła 40 ziaren, to znaczy ich faktyczna waga nie mogła być większa od 5800 ziaren i mniejsza od 5720 ziaren. Tolerancja zwiększała się *liniowo* w zależności od łącznej nominalnej wagi monet w skrzyni, tak więc jeśli w skrzyni były monety o nominalnej wadze 87 funtów, to tolerancja dla tej wagi wynosiła $87 \times 40 = 3480$ ziaren.

1 funt jubilerski = 5760 ziaren = 373,24172 grama.

1 ziarno = 0,06479891 grama.

W 1848 roku tolerancję zmniejszono do 12 ziaren na funcie.

Z jednego funta 22-karatowego złota (zawierającego 91,67 procent czystego złota) bito 44,5 gwinei.

W początkowym okresie kontroli skrzyni Pyx wynik pozytywny nie oznaczał bynajmniej końca całego procesu. Mianowicie, w przypadku pozytywnego wyniku kontroli, ale wskazującego na to, że średni ciężar monety był poniżej ustalonej wagi, różnica w wadze dla całości produkcji mennicy od poprzedniej kontroli musiała być zwrócona do skarbca królewskiego. Później tej praktyki zaniechano (być może dlatego, żeby posada kierującego Mennicą była jeszcze bardziej intratna). Jak się dalej okaże, była to dla Korony bardzo zła decyzja. Aby dokładnie uzasadnić, dlaczego, przydadzą nam się pewne podstawowe pojęcia i fakty z rachunku prawdopodobieństwa. Czytelnicy, którzy są zaznajomieni z tą dziedziną – lub nie są szczególnie zainteresowani częścią techniczną – mogą śmiało kontynuować lekturę za wzorem ($\star$).

Jak powinna zmieniać się tolerancja? Przypomnijmy kluczową dla odpowiedzi na to pytanie koncepcję statystycznej niezależności. Mówimy, że dwa zdarzenia losowe A i B mające niezerowe prawdopodobieństwa wystąpienia są niezależne, jeśli zaobserwowanie jednego z tych zdarzeń nie zmienia oceny prawdopodobieństwa zajścia drugiego. W terminach prawdopodobieństwa warunkowego $\mathbb{P}(A|B) := \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$ wyraża się to jako

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Po przemnożeniu obu stron drugiej równości przez $\mathbb{P}(B) > 0$ jest to równoważne równości $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$. Ciąg zdarzeń losowych składa się ze zdarzeń *parami* niezależnych, jeśli dowolne dwa zdarzenia w tym ciągu są niezależne.

Pojęcie niezależności parami jest nieco słabsze od własności, że wszystkie te zdarzenia są niezależne.

Dla zmiennych losowych X i Y ich niezależność oznacza, że zdarzenia polegające na przyjęciu wartości z dowolnie określonych zbiorów są niezależne, to znaczy $\mathbb{P}(X \in C, Y \in D) = \mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(Y \in D)$. Można się teraz domyślić, jak zdefiniujemy niezależność *parami* ciągu zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$: oznacza to po prostu, że dowolne dwie zmienne losowe w tym ciągu są niezależne.

Przypomnijmy teraz dwie podstawowe charakterystyki zmiennych losowych. Pierwsza z nich to *wartość oczekiwana*: dla zmiennych, które mogą przyjąć skończenie wiele wartości $a_1, \ldots, a_N$, jest to suma tych wartości przemnożonych przez prawdopodobieństwo ich uzyskania, tzn.

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X = a_i) \cdot a_i.$$

Zgodnie z *prawem wielkich liczb* średnia wartość ciągu niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa zbiega do wartości oczekiwanej pojedynczej zmiennej – temu wartość oczekiwana zawdzięcza swoją nazwę.

Druga z istotnych dla nas wielkości to *wariancja*, czyli wartość oczekiwana kwadratu odstępstwa od wartości oczekiwanej:

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}X\big)^2.$$

Zgodnie z *nierównością Markowa* dla zmiennej losowej X przyjmującej wartości nieujemne i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a zachodzi $\mathbb{P}(X > a) \leqslant \frac{\mathbb{E}X}{a}$ (krótki dowód poniżej).

$$a\mathbb{P}(X > a) = \sum_{i\colon a_i > a} a \cdot \mathbb{P}(X = a_i) < \sum_{i\colon a_i > a} a_i \cdot \mathbb{P}(X = a_i) \leqslant \mathbb{E}X$$

Podstawiając pod X zmienną $(X - \mathbb{E}X)^2$, dostajemy *nierówność Czebyszewa*: $\mathbb{P}\big((X - \mathbb{E}X)^2 > a\big) \leqslant \frac{\operatorname{Var} X}{a}$, którą możemy przepisać (podstawiając $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X}$ i $c = \sqrt{a}/\sigma_X$) w postaci:

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}X| > c \cdot \sigma_X\big) < \frac{1}{c^2}.$$

To oszacowanie jest *bardzo* zgrubne, stanowi jednak proste uzasadnienie tego, że σ_X (nazywane *odchyleniem standardowym*) jest dobrą „jednostką” tolerancji – widzimy, że prawdopodobieństwo odstępstwa zmiennej od jej wartości oczekiwanej o wielokrotność σ_X maleje co najmniej tak, jak kwadrat współczynnika wielokrotności.

Przyjrzyjmy się teraz, co można powiedzieć o wariancji sumy zmiennych losowych. Zauważmy, że jeśli X i Y są niezależne i przyjmują odpowiednio wartości a_i $(i \leqslant N)$ oraz b_j $(j \leqslant M)$, to

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= \sum_{i,j} \mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j) a_i b_j = \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{P}(X = a_i)\mathbb{P}(Y = b_j) a_i b_j = \\
&= \sum_{i} \mathbb{P}(X = a_i) a_i \cdot \sum_{j} \mathbb{P}(Y = b_j) b_j = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.
\end{aligned}$$

Z powyższej własności wynika ważna własność wartości oczekiwanej iloczynu scentrowanych (czyli pomniejszonych o ich wartość oczekiwaną) zmiennych losowych $X - \mathbb{E}X$ i $Y - \mathbb{E}Y$. Scentrowanie sprawia, że zmienna, jaką w rezultacie otrzymamy, ma zerową wartość oczekiwaną. Ponadto (łatwy dowód pozostawiamy do samodzielnego przeprowadzenia) niezależność zmiennych losowych pociąga za sobą niezależność ich scentrowanych wersji. Stosując teraz ostatnią równość do zmiennych scentrowanych $X - \mathbb{E}X$ i $Y - \mathbb{E}Y$, dostaniemy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) \cdot \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y) = \\
&= 0 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Ostatecznie dla niezależnych zmiennych losowych X, Y

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}(X + Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X) + (Y - \mathbb{E}Y)\big)^2 = \\
&= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)^2 + 2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) = \\
&= \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y
\end{aligned}$$

(niejawnie skorzystaliśmy z prostego, acz wielce pożytecznego faktu, że wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych to suma wartości oczekiwanych tych zmiennych). Podobnie możemy uzasadnić analogiczną równość dla sumy większej liczby niezależnych składników.

W naszej historii zmienna X_i oznaczać będzie wagę (z dokładnością do jednego ziarna) i-tej monety w skrzyni Pyx. Rozsądnym założeniem jest przyjęcie, że waga i-tej monety nie zależy od wagi żadnej innej monety w skrzyni, czyli że wagi monet są parami niezależne.

Obliczmy teraz wariancję łącznej wagi monet w Pyxie. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ będzie łączną wagą monet w skrzyni. Jak wcześniej pokazaliśmy,

$$\operatorname{Var} S_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i).$$

Niech $\sigma_n^2 = \operatorname{Var} S_n$. Jeśli przyjmiemy założenie, że rozkłady wag monet się nie różnią, to z ostatniej równości wynika, że

$$(\star) \qquad \sigma_n^2 = n\sigma_1^2, \quad \text{czyli} \quad \sigma_n = \sqrt{n}\sigma_1.$$

Czytelnicy bardziej obyci z rachunkiem prawdopodobieństwa doskonale zdają sobie sprawę z tego, że w kontekście sumy niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie odchylenie standardowe staje się idealną miarą tolerancji w tym sensie, że na mocy Centralnego Twierdzenia Granicznego

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| > c \cdot \sigma_n) = 2\big(1 - \Phi(c)\big),$$

gdzie Φ jest *dystrybuantą rozkładu normalnego*. Zachodzi ponadto:

$$1 - \Phi(c) \leqslant \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}},$$

co pokazuje, jak bardzo zgrubne jest w tej sytuacji wcześniejsze oszacowanie wykorzystujące nierówność Czebyszewa.

Uzasadniliśmy zatem istotną dla naszych rozważań własność: jeśli za miarę zmienności zmiennej losowej przyjmiemy jej odchylenie standardowe, to odchylenie standardowe sumy n parami niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jest równe odchyleniu standardowemu pojedynczej zmiennej przemnożonemu przez *pierwiastek* z liczby zmiennych.

Co z tego wynika?

Konsekwencje naszych rozważań dla tolerancji obowiązujących Mennicę trudno przeoczyć. Granice tolerancji w procedurze kontroli Pyxa były ustawiane za bardzo liberalnie, co powodowało w szczególności, że konsekwentnie wybijając monety o tej samej, mniejszej niż nominalna wadze, można było i tak zmieścić się w granicach tolerancji; przejść przez inspekcję i zachować posadę. Dla przykładu załóżmy, że dopuszczalna tolerancja na wadze jednej hipotetycznej monety wynosi 1 ziarno. Wtedy na partii 100 monet dopuszczalna tolerancja (zgodnie z wytycznymi kontroli Pyx) wynosi 100 ziaren. Jednak zgodnie z naszymi ustaleniami ta tolerancja powinna być rzędu $\sqrt{100} = 10$ ziaren! Zmniejszając wagę pojedynczej monety o 9/10 ziarna, mieścimy się ciągle w granicach tolerancji, gdyż strata na wadze wynosiła $(9/10) \times 100 = 90$ ziaren, co nawet po dodaniu $\sqrt{100} = 10$ ziaren, czyli „właściwej" tolerancji, nie przekracza zadanego pułapu 100 ziaren.

Dlaczego ustalenie zbyt liberalnych granic tolerancji było groźne? Jeśli monety były zbyt lekkie i wchodziły do obiegu, to po pierwsze, korzystała na tym Mennica (przypomnijmy: Mennica była niezależna od Korony), a po drugie obniżało to zaufanie do pieniądza – gwinea powinna być tyle warta, ile kruszec, z którego została wybita. Jeśli monety były zbyt ciężkie, co było wychwytywane przez złotników, to traciła na tym Korona, a zyskiwali złotnicy. Monety były pozbawiane nadmiarowej części kruszcu przez spiłowanie, następnie po przetopieniu wracały do Mennicy do ponownego wybicia z nich monet. O tym, że proceder ten był dosyć powszechny, świadczy fakt, że zbyt ciężkie monety poddane temu procesowi doczekały się swojej własnej nazwy: „powracające gwinee" (*come-again-guineas*). Jeśli zestawimy to z faktem, że inspekcja skrzyni dotycząca wagi tylko dwukrotnie (i to w obu przypadkach przed 1550 r.) zakończyła się werdyktem negatywnym, możemy wnioskować, że monety w obiegu „nie trzymające wagi" mogły być zjawiskiem powszechnym, w każdym razie do momentu, gdy kierowanie Mennicą objął Izaak Newton. Jednakże umyślne zaniżanie wagi złotych monet przez trzymanie się dolnej granicy tolerancji wytykano w parlamencie brytyjskim – co może nie jest zaskakujące – Francuzom...

Izaak Newton jako kierujący Mennicą. Newton był związany z Mennicą przez ponad 30 lat, najpierw piastując funkcję nadzorcy (*Warden*), a później, od roku 1699 aż do śmierci w roku 1727, kierującego Mennicą (*Master of the Mint*). W odróżnieniu od wielu swoich poprzedników, którzy traktowali to stanowisko wyłącznie jako źródło dodatkowych dochodów, Newton bardzo zaangażował się w działalność Mennicy i doprowadził do znacznego poprawienia efektywności procesu tłoczenia monet.

W kontrakcie Newton miał również wpisane ściganie i wszczynanie postępowań wobec fałszerzy monet. Tego obowiązku Newton bardzo nie lubił i prosił króla o zwolnienie go z niego.

W rezultacie zjawisko przetapiania zbyt ciężkich monet i powtórnego ich bicia z uzyskanego kruszcu zostało bardzo ograniczone. Nas interesuje jednak pytanie, czy Newton zdawał sobie sprawę, że tolerancja wagi monet sprawdzana podczas kontroli Pyxa i wynosząca za jego czasów 40 ziaren na funt jest zbyt liberalna?

Mimo ogromnej dbałości o jakość bitych monet Newton nie uniknął oskarżenia o zaniżanie próby złota. Stało się to podczas kontroli Pyxa w 1710 roku. Newton przekonująco argumentował, że powodem tego była zbyt wysoka zawartość złota w referencyjnym stopie (*trial plate*), która wynosiła 91,71 procenta zamiast wymaganych 91,66 procenta.

Dwa fakty są interesujące w tym kontekście. Fakt pierwszy: Newton, choć sam zbytnio nie interesował się losowością, znał dobrze Abrahama de Moivre'a, jednego z „ojców" rachunku prawdopodobieństwa, i mógł z nim rozmawiać o tej kwestii. Wynik Jakuba Bernoulliego, opublikowany w jego *Ars Conjectandi,* mówiący o tym, jak prawdopodobne jest odchylenie frakcji orłów od 1/2 w wielokrotnym rzucie monetą, podane w terminach odchylenia standardowego dla frakcji, był de Moivre'owi, jeśli nie Newtonowi, doskonale znany. Drugi fakt to informacja, że w chwili śmierci Newton był bogatym człowiekiem, choć nie zaliczał się do takich przed zostaniem kierującym Mennicą, co nasuwa pytanie, czy wzbogacenie Newtona nie było związane z wykorzystaniem jego wiedzy o zbyt liberalnej tolerancji dla wagi monet. Należy tu jednocześnie podkreślić, że jako kierujący Mennicą pobierał sowite wynagrodzenie.

Historycy statystyki są zgodni co do twierdzącej odpowiedzi na postawione pytanie: Newton musiał sobie zdawać sprawę, że tolerancje wyznaczone w inspekcji Pyxa nie wymuszają pożądanej wagi pojedynczej monety i dlatego przedsięwziął działania mające na celu ulepszenie procesu bicia monet. Niestety, nie ma jednak żadnych konkretnych dowodów na to, że Newton wiedział, że zmienność sumy skaluje się proporcjonalnie do pierwiastka z liczby składników. Pośrednim argumentem w tych rozważaniach, który przytaczamy za S. Stiglerem [2], może być jedynie przeprowadzona przez Newtona analiza średniej długości trwania rządów monarchów poczyniona na podstawie analizy 12 dynastii, od czasów Judei do współczesnej mu Francji. Doprowadziła ona do konkluzji, że przeciętna długość rządów wynosiła od 18 do 20 lat [3]. Co ciekawe, Newton podaje przedziałową ocenę długości rządów, a nie średnią wyliczoną z danych (wynosząca 19,1 roku). Co więcej, wynosząca jeden rok odchyłka od średniej i prowadząca w przybliżeniu do uzyskanego przez Newtona przedziału zgadza się niemal dokładnie z odchyleniem standardowym policzonym z danych, podzielonym przez pierwiastek z liczby obserwacji. Niestety samego wyliczenia prowadzącego do wartości odchyłki Newton nie podaje.

Jeśli Newton wiedział, to dlaczego nie starał się zmienić kryteriów kontroli skrzyni Pyx? Powód jest oczywisty – nie było to w jego interesie. Przypuszczalnie nie było to również w interesie króla, któremu zależało na podtrzymaniu zaufania do znajdujących się w obiegu monet.

Jeszcze o tolerancji

Istotną kwestią jest również to, jak ustalono tolerancję dla partii o ciężarze 1 funta. W 1850 roku na polecenie Izby Gmin zważono 10 tysięcy złotych suwerenów.

Złoty suweren to złota moneta o wartości jednego funta będąca w obiegu od 1817 roku.

Okazało się, że rozkład wagi tych monet był w przybliżeniu normalny, a dokładnie 454 z nich były nienormatywne, to znaczy za lekkie lub za ciężkie względem tolerancji dla 1 funta monet (w 1848 roku zmniejszonej do 12 ziaren na funt) po jej *liniowej* transformacji na dopuszczalny ciężar jednej monety. Tak więc frakcja nienormatywnych monet wynosiła $454/10\,000 \approx 0{,}05$. Oznacza to, że tolerancja dla jednej monety była wyznaczona bardzo rozsądnie: odpowiadała małemu prawdopodobieństwu jej przekroczenia przez jedną, losowo wybraną, monetę. Natomiast problem pojawia się, gdy prawidłową tolerancję dla jednej monety liniowo przekształcimy na tolerancję dla partii monet o wadze jednego funta.

Zamiast podsumowania

Wiedza, że tolerancja w inspekcji Pyxa jest zbyt liberalna, była przypuszczalnie dostępna zarówno większości kierujących Mennicą, jak i zlecających kontrolę monarchom. Paradoksalnie, mogło to być na rękę jednym i drugim. Kierującemu Mennicą pozwalała spać spokojnie – bez strachu, że zostanie odwołany i, być może, dawała możliwość uzyskiwania korzyści finansowych w wyniku bicia nieco lżejszej monety. Królowi, bo zapewniała bardzo potrzebne zaufanie społeczne do pieniądza. Być może, na co jednak nie ma żadnych dowodów, monarcha mógł wpływać na kierującego Mennicą, żeby bił nieco lżejszą monetę.

Na koniec warto dodać, że sam proces kontroli skrzyni Pyx jest jednym z pierwszych, jeśli nie pierwszym, w historii przykładem dokonywanej systematycznie statystycznej kontroli jakości.

Literatura

[1] Craig J., *Newton at the Mint*, Cambridge, 1946.
[2] Stigler S., *Statistics on the table*, Harvard University Press, 1999.
[3] Newton I., *Chronology of Ancient Kingdoms Amended*, 1728.

Rozwiązania zadań z artykułu *Nie wiem, czy wiesz...* (str. 12)

1. Przyjrzyjmy się dokładniej wnioskom z drugiej negatywnej odpowiedzi. Otóż skoro Bernard nie ma liczby 0 (i już wie, że Alojz już o tym wie), to po odpowiedzi Alojza może wywnioskować nie tylko, że ten nie ma liczby 0, ale też 1. Istotnie, gdyby Alojz miał 1, to Bernard musiałby mieć 2. Rozumując analogicznie dla kolejnych etapów zabawy, dochodzimy do wniosku, że jeśli w pytaniu k-tym padła odpowiedź negatywna, to żaden z geniuszy nie może mieć liczby $k-2$ ani mniejszej; w szczególności gdyby padło $k=n+2$ przeczących odpowiedzi, to żaden nie mógłby mieć liczby $k-2=n$.

2. a) Nie. Ponieważ każda liczba (w tym 0, co kluczowe) może być sparowana z więcej niż jedną, więc pierwsza negatywna odpowiedź nie dostarcza żadnej nowej informacji. Wobec tego stan wiedzy każdego geniusza po pierwszym pytaniu jest dokładnie taki jak przed nim. Ten sam argument można więc zastosować do drugiego, trzeciego i każdego kolejnego pytania.

b) Tak! Odpowiedzi twierdzącej należy spodziewać się nawet wcześniej niż w oryginalnym scenariuszu. Bernard znałby liczbę Alojza, gdyby sam miał $0, 1$ lub 2. Zatem jeśli odpowie „nie”, to wiadomo już, że ma co najmniej 3. Dalszy ciąg argumentu jest analogiczny jak w głównym tekście artykułu.

3. Otóż gdyby Odyn kłamał, znaczyłoby to, że na wyspie są sami bohaterowie. Każdy z nich widziałby poza sobą tylko bohaterów, zatem ufając Odynowi musiałby uznać siebie samego za tchórza. To oznacza, że gdyby Odyn kłamał, to wszyscy Wikingowie odpłynęliby już w dniu objawienia, a nie setnego dnia.

5. Naiwne poszukiwania nie są tu, niestety, zbyt owocne. Autor bezpośrednio (choć z pomocą komputera) sprawdził, że wśród liczb poniżej 100 dwa rozkłady na trzy czynniki o równej sumie mają jedynie $40 = 1\cdot 5\cdot 8 = 2\cdot 2\cdot 10$, $90 = 1\cdot 9\cdot 10 = 2\cdot 3\cdot 15$ oraz $96 = 1\cdot 8\cdot 12 = 2\cdot 3\cdot 16$. Można także zauważyć, że szukana liczba nie może być pierwsza, nie może być też potęgą liczby pierwszej ani iloczynem dokładnie dwóch liczb pierwszych. Uzasadnienie tych wniosków nie jest trudne i zostawiamy je Czytelnikowi.

Spróbujmy więc dokładniej odtworzyć sytuację, która wystąpiła w zadaniu. (Nie twierdząc, że inna jest niemożliwa). Okazało się tam, że $1\cdot 6\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 9$ oraz $1+6+6 = 2+2+9$. Spróbujmy więc znaleźć takie liczby a, b, że $1+ab+ab = a+a+b^2$ (równość $1\cdot ab\cdot ab = a\cdot a\cdot b^2$ jest oczywista). Przekształcając, otrzymujemy $2a(b-1) = b^2-1$ i w konsekwencji $2a = b+1$. Przykład w zadaniu otrzymujemy, kładąc $a=2$. Natomiast $a=3$ prowadzi do liczby 225. Bezpośrednio można sprawdzić, że z liczbą 225 w miejscu 36 zadanie „Córki” nadal jest sensowne, a jego rozwiązanie przebiega analogicznie do przedstawionego w artykule. Otrzymane wyniki są też w granicach wiarygodności jako wiek człowieka.

6. Gdyby na wyspie nie było lwów, koza byłaby bezpieczna. Oznacza to, że samotny lew może ją zjeść bez obawy o swój los (bo stanie się wtedy samotną, a więc bezpieczną, kozą). Jeśli więc na wyspie żyją dwa lwy, to koza jest bezpieczna: lew, który by ją zjadł, zostałby kozą na wyspie z jednym lwem, czyli kozą zjedzoną. Rozumując tak dalej, wnioskujemy, że koza jest bezpieczna, gdy liczba lwów n jest parzysta, a zjedzona, gdy n jest liczbą nieparzystą.

7. Oznaczmy liczbę Toli literą t, a Lolka – l. Skoro Tola nie znała l, to znaczy, że t jest dzielnikiem liczby 1282. Istotnie, w przeciwnym razie nie mogłaby zachodzić równość $1282 = t\cdot l$, zatem mielibyśmy $1282 = t+l$ i stąd $l = 1282-t$ – o czym wiedziałaby Tola. Podobnie jak t, także l musi być dzielnikiem liczby 1282. Ponadto $t \geqslant 1282/2$, gdyż gdyby było $t < 1282/2$ i $t+l = 1282$, to $l > 1282/2$. Jedynym dzielnikiem liczby naturalnej większym od jej połowy jest ona sama, zatem Lolek wiedziałby, że $t = 1282$. Nie może też mieć liczby 1282, bo wówczas wiedziałby, że $t=1$. Liczba Lolka musi więc być równa $1282/2 = 641$. W tym zadaniu kuszące jest wypisanie dzielników liczby 1282. Okazuje się jednak, że nie jest to czynność niezbędna; istotnie, powyższy argument pozostaje skuteczny po zastąpieniu liczby 1282 dowolną inną liczbą parzystą, niezależnie od jej dzielników.