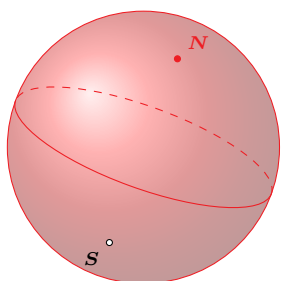
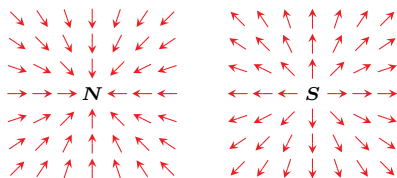


Twierdzenie Białynickiego-Biruli o rozkładzie

Maria DONTEN-BURY*, Joachim JELISIEJEW*, Jarosław A. WIŚNIEWSKI*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Maria Donten-Bury była redaktorką *Delta* w latach 2009–2014.

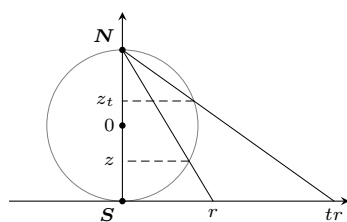


Wyprawa na biegun północny. Wyobraźmy sobie podróżników na powierzchni Ziemi wyposażonych w kompasy wskazujące północ (przyjmijmy, że północ magnetyczna i geograficzna to to samo i że nie ma żadnych lokalnych anomalii). Wskazania kompasów w okolicach biegunów północnego N i południowego S pokazują rysunki na marginesie. Każdy z podróżników chce dotrzeć na biegun północny. Jeśli podróżnik nie znajduje się akurat na biegunie, to wie, co ma robić: wędruje wzdłuż południka, na którym się znajduje, zgodnie ze wskazaniem kompasu. Ale na biegunie kompas jest bezużyteczny, bo nie pokazuje jednego kierunku – bieguny są punktami krytycznymi dla zadania podróżnika. Mimo to podróżnik będący na biegunie północnym umie poradzić sobie z zadaniem: po prostu stoi w miejscu.

W ten sposób zadanie dotarcia do bieguna i sam proces podróży dają nam podział powierzchni Ziemi (którą matematyk widzi jako sferę) na części, nazywane komórkami. Jedna to prawie cała sfera wraz z punktem N , druga jest jednopunktowa i składa się z bieguna S . Zauważmy, że komórki są w pewnym sensie prostsze niż wyjściowa sfera: ta większa komórka to właściwie płaszczyzna, tylko trochę wygięta.

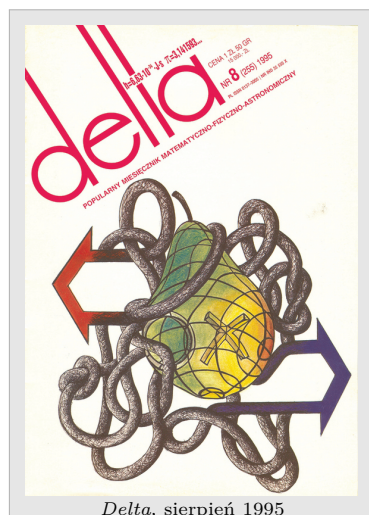
Twierdzenie o rozkładzie. Powyższy przykład wygląda na łatwy, ale Czytelnik może sobie wyobrazić, że jeśli zamiast sfery próbujemy podzielić na proste kawałki przestrzeni o mniej oczywistej strukturze, to problem robi się znacznie ciekawszy. Dla pewnej klasy przestrzeni rozwiązaniem jest *twierdzenie Andrzeja Szczepana Białynickiego-Biruli o rozkładzie*, które można wypowiedzieć jednym zdaniem:

Jeśli pogrupujemy punkty rozmaitości X względem granic przy działaniu grupy \mathbb{K}^ , to otrzymamy zaskakująco ładne i mniej skomplikowane podrozmaitości.*



To, że X jest *rozmaitością*, znaczy, że w bliskiej okolicy każdego swojego punktu przypomina zwykłą przestrzeń euklidesową: prostą, płaszczyznę, przestrzeń trójwymiarową... być może trochę zakrzywioną. Taką strukturę mają na przykład okrąg, sfera, powierzchnia torusa, ale też bardziej skomplikowane formy, jak przestrzeń rzutowa (o której za chwilę).

Oprócz rozmaitości mamy *grupę*, czyli zbiór elementów, na których możemy wykonywać pewne działanie oraz je odwracać. Na przykład grupę \mathbb{R}^* niezerowych liczb rzeczywistych, które da się mnożyć i dzielić. Taka grupa *działa* na pewnej rozmaitości, jeśli każdy jej element coś robi z punktami rozmaitości, jakoś je przestawia. Co więcej, te przestawienia mają być zgodne z mnożeniem w grupie, ale tu nie będziemy potrzebowali tego dokładnie wyjaśnić.



Spróbujmy w tym języku opowiedzieć o wyprawie na biegun północny. Jak zwykle, zamiast o powierzchni Ziemi myślimy o sferze S^2 zanurzonej w trójwymiarowej przestrzeni \mathbb{R}^3 . Opiszmy tę sferę równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Działa na niej grupa \mathbb{R}^* w następujący sposób. Trzecią współrzędną punktu na sferze możemy zapisać jako $z = \frac{r^2 - 4}{r^2 + 4}$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$. Wtedy liczbie $t \in \mathbb{R}^*$ przypiszemy przekształcenie S^2 , które przesuwają punkt wzdłuż południka do punktu o trzeciej współrzędnej $z_t = \frac{t^2 r^2 - 4}{t^2 r^2 + 4}$. Skąd te wzory? Pochodzą od mnożenia przez liczby z \mathbb{R}^* , jeśli najpierw rozprostujemy południk przekształceniem odwrotnym do rzutu stereograficznego. Geometryczny charakter przedstawionych zależności prezentuje rysunek na marginesie.

Oczywiście współrzędne x i y też się zmieniają – w taki sposób, żeby podróżnik został na tej samej długości geograficznej – ale nie potrzebujemy znać dokładnie ich nowych wartości. Zauważmy jeszcze, że bieguny moglibyśmy (niezbyt ściśle) opisać, w miejsce r wstawiając 0 oraz ∞ .



Rozwiązanie zadania F 1085.

Zacznijmy od przypomnienia skal energii.

Energia wiązań chemicznych to co najwyżej około 10 eV – wiązanie cząsteczki N₂ o energii 9,79 eV należy do najsilniejszych. Energia wiązania elektronów wewnętrznych powłok atomowych lekkich pierwiastków sięga pojedynczych kiloelektronowoltów (1362 eV dla neonu). Oznacza to, że azot ogrzany do temperatury $T = 5000 \text{ eV}/k \approx 5,8 \cdot 10^7 \text{ K}$ jest mieszaniną jonów azotu N⁷⁺ i elektronów e⁻ w liczbie 7 razy większej niż liczba jonów azotu, a średnia energia kinetyczna każdego z jonów i elektronów wynosi 2000 eV. Z każdego mola azotu cząsteczkowego o masie $m = 2 \cdot 14 \text{ g} = 28 \text{ g}$ powstaje 16 moli mieszaniny gazów jednocząstkowych. Wartość ciepła właściwego w stałej objętości na jednostkę masy tej mieszaniny wynosi:

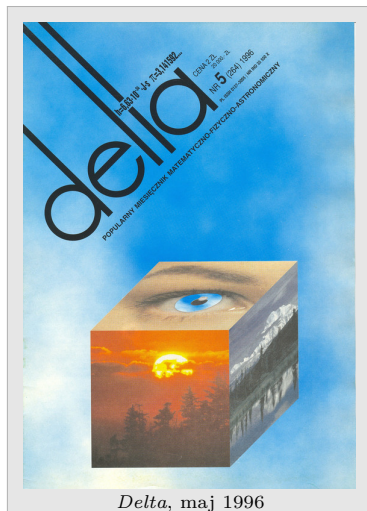
$$c_v = \frac{3}{2} 16R/m.$$

W powyższym wzorze

$R \approx 8,314 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$ oznacza stałą gazową. Liczbowo: $c_v \approx 7,13 \text{ J}/(\text{g}\cdot\text{K})$ i jest około 1,7 raza większe od ciepła właściwego ciekłej wody. Podana temperatura 5000 eV/k to około połowy temperatury w pobliżu centrum wybuchu jądrowego.

Definicję na klasach punktów można ująć w zgrabnej formie:

$$\mathbb{RP}^2 := (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})/\mathbb{R}^*.$$



Delta, maj 1996

Twierdzenie o rozkładzie mówi o grupowaniu punktów S^2 względem *granic* przy działaniu \mathbb{R}^* . Możemy zapisać $z_t = \frac{r^2 - 4/t^2}{r^2 + 4/t^2}$, skąd widać, że dla każdego $r \neq 0$ (czyli $z \neq -1$) jeśli t dąży do ∞ , to z_t dąży do 1. A jedyny punkt na sferze, w którym $z = 1$, to biegun N . Wobec tego grupowanie punktów S^2 względem *granic* przy badanym działaniu wyodrębnia, jak przewidzieliśmy, dużą komórkę złożoną z całej sfery oprócz bieguna S , dla której granicą jest biegun N . Druga komórka jest jednopunktowa, złożona z bieguna S , który jest swoją własną granicą przy działaniu \mathbb{R}^* , czyli tak zwanym *punktem stałym*.

Granice, których... brakuje. Jak widać, granice przy działaniu grupy są kluczowym elementem twierdzenia o rozkładzie. W powyższym przykładzie mieliśmy szczęście, i udało nam się je dość łatwo obliczyć. Spójrzmy teraz na sytuację, która pomoże nam lepiej zdefiniować granice przy działaniu grupy w ogólnym przypadku.

Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i określmy działanie \mathbb{R}^* na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 wzorem

$$(1) \quad t \circ (x, y) := (t^{-1}x, ty),$$

gdzie $t \in \mathbb{R}^*$. Jaka jest granica punktu (x, y) przy tak określonym działaniu? Jeśli $y = 0$, to sprawa jest prosta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \circ (x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-1}x, ty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-1}x, 0) = (0, 0).$$

Ale jeśli $y \neq 0$, to ta granica nie istnieje na płaszczyźnie... Fakt, że czasem tak się dzieje, jest irytujący. Mamy kłopot, ponieważ użyliśmy płaszczyzny \mathbb{R}^2 , której brakuje „punktów w nieskończoności”. Problem ten odczuwało już wielu matematyków i istnieje standardowe lekarstwo: zamiast płaszczyzny \mathbb{R}^2 powinniśmy rozważyć *płaszczyznę rzutową*.

Płaszczyzna rzutowa to wersja płaszczyzny z „wbudowaną nieskończonością”. W *Delcie* o niej nie raz już była mowa – po krótki opis można sięgnąć do Δ_{19}^4 , ale lepiej poznać ją z różnych punktów widzenia w Δ_{13}^5 . Tutaj zdefiniujemy ją jako zbiór punktów $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ (tak!), gdzie utożsamiamy punkty (x_0, y_0, z_0) oraz (x_1, y_1, z_1) , jeśli są proporcjonalne, czyli istnieje taka liczba $\lambda \in \mathbb{R}^*$, że $x_1 = \lambda x_0$, $y_1 = \lambda y_0$, $z_1 = \lambda z_0$. Klasę tak utożsamionych punktów oznaczamy przez $(x_0 : y_0 : z_0)$, a zbiór wszystkich tych klas to właśnie płaszczyzna rzutowa, oznaczana jako \mathbb{RP}^2 . Dodajmy, że z przedstawionej definicji wynika, iż $(x_0 : y_0 : z_0) = (\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0)$ dla każdej niezerowej liczby λ .

Z tej definicji nie widać jednak zupełnie, dlaczego \mathbb{RP}^2 nazywa się *płaszczyzną rzutową*. Otóż w każdej klasie $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{RP}^2$, gdzie $z_0 \neq 0$, jest dokładnie jeden punkt z ostatnią współrzędną równą 1 – to $(x_0/z_0, y_0/z_0, 1)$. Możemy więc utożsamić zbiór

$$U := \{(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{RP}^2 \mid z_0 \neq 0\}$$

ze zbiorem \mathbb{R}^2 , gdzie punktowi $(x_0 : y_0 : z_0) \in \mathbb{RP}^2$ odpowiada $(x_0/z_0, y_0/z_0) \in \mathbb{R}^2$. Pozostałe punkty \mathbb{RP}^2 , te postaci $(x_0 : y_0 : 0)$, uważamy za dodane do płaszczyzny U *punkty w nieskończoności*.

Wracając do naszego przykładu, możemy zdefiniować działanie \mathbb{R}^* na \mathbb{RP}^2 poprzez $t \circ (x : y : z) = (t^{-1}x : ty : z)$. Jeśli popatrzymy na U , to $t \circ (x : y : 1) = (t^{-1}x : ty : 1)$, co dokładnie zgadza się ze wzorem (1), którym powyżej definiowaliśmy działanie na \mathbb{R}^2 . Teraz wreszcie możemy znaleźć granice dowolnego punktu przy tak ustalonym działaniu. Mianowicie, jeśli weźmiemy $(x : y : z) \in \mathbb{RP}^2$, gdzie $y \neq 0$, to

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t \circ (x : y : z) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-1}x : ty : z) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-1} \cdot t^{-1} \cdot x : t^{-1} \cdot ty : t^{-1}z) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-2}x : y : t^{-1}z) = (0 : y : 0) = (0 : 1 : 0). \end{aligned}$$

Prościej można obliczyć granicę punktu $(x : 0 : z) \in \mathbb{RP}^2$, gdzie $z \neq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \circ (x : 0 : z) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{-1}x : 0 : z) = (0 : 0 : z) = (0 : 0 : 1).$$

Ostatni nierozważony jeszcze punkt \mathbb{RP}^2 to $(1 : 0 : 0)$. Ale w tym przypadku $t \circ (1 : 0 : 0) = (t^{-1} : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$, czyli mamy punkt stały działania.



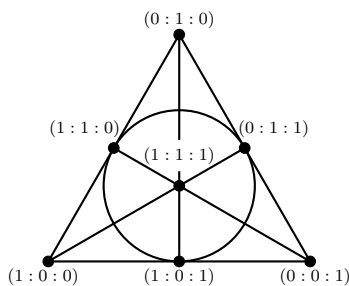
Rozwiązanie zadania M 1767.
Zauważmy, że

$$(m+1)(m(4m+3)^2+1) = \\ = ((m+1)(4m+1))^2,$$

wobec tego para $(m, m(4m+3)^2)$ spełnia warunki zadania.

Co by było, gdyby te liczby nie były różne?

Istnieją też dodatnie komórki zdefiniowane podobnie, ale gdy granice bierze się przy $t \rightarrow 0$.



Ilustracja płaszczyzny rzutowej $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$

Jak wobec tego wygląda pogrupowanie punktów względem granic przy działaniu \mathbb{R}^* ? Zbiór punktów takich, że $y \neq 0$, których granicą jest $(0:1:0)$, można utożsamić z płaszczyzną \mathbb{R}^2 (podobnie jak powyżej punkty, dla których $z \neq 0$). Zbiór punktów takich, że $y = 0$, ale $z \neq 0$, dla których granicą jest $(0:0:1)$, utożsamia się z prostą \mathbb{R} . Ostatni zbiór składa się z punktu $(1:0:0)$. Otrzymaliśmy więc podział płaszczyzny rzutowej na bardzo ładne części – ładne w tym przypadku oznacza, że można je utożsamić z \mathbb{R}^n dla pewnego n , zależnego od granicy.

Tytułowe twierdzenie, które wreszcie możemy dokładnie sformułować, mówi, że to samo będzie się działo dla każdego (algebraicznego) działania na każdej gładkiej podrozmaitości w każdej przestrzeni rzutowej (nie tylko na płaszczyźnie). Teraz zamiast \mathbb{R} będziemy dla większej ogólności pisać \mathbb{K} , bo twierdzenie działa nie tylko dla ciała liczb rzeczywistych. Ustalmy też różne liczby całkowite a_0, \dots, a_n i zdefiniujmy działanie \mathbb{K}^* na $\mathbb{K}\mathbb{P}^n$ wzorem

$$t \circ (x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (t^{a_0}x_0 : t^{a_1}x_1 : \dots : t^{a_n}x_n).$$

Zbiór punktów o ustalonej granicy p nazywamy (*ujemną*) *komórką Białynickiego-Biruli* stowarzyszoną z p .

Twierdzenie (ASBB, 1973). *Niech $X \subseteq \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ będzie gładką podrozmaitością taką, że $\mathbb{K}^* \circ X \subseteq X$, czyli działanie nie wyprowadza punktów X poza X . Wtedy każda komórka Białynickiego-Biruli w X jest izomorficzna z przestrzenią liniową \mathbb{K}^{n_i} dla pewnego $n_i \in \mathbb{N}$ zależnego od komórki.*

Inne ciała. Jak wspomnieliśmy powyżej, nie korzystamy z żadnych szczególnych własności ciała liczb rzeczywistych. Analiza przykładu przebiegałaby właściwie tak samo, gdyby za \mathbb{R} wszędzie podstawić \mathbb{Q} . Ba, ten argument działa nawet, jeśli zamiast \mathbb{R} wybierzemy ciało liczb zespolonych \mathbb{C} lub ciało \mathbb{Z}_p , które ma p elementów, dla liczby pierwszej p . Musimy jedynie zachować konwencję, że $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-n}x$ jest równe zero dla każdego naturalnego $n > 0$ i każdego $x \in \mathbb{C}$ czy \mathbb{Z}_p . To wiedzie do paradoksalnego, ale słusznego wniosku, że używane powyżej pojęcie granicy nie wymaga żadnej „ciągłości”. Przykładowo, Czytelnik może obliczyć, że $\mathbb{Z}_2\mathbb{P}^2$ składa się jedynie z siedmiu punktów:

$$(0:0:1), (0:1:1), (1:0:1), (1:1:1), (1:0:0), (0:1:0), (1:1:0),$$

a mimo to równość $\lim_{t \rightarrow \infty} t \circ (1:1:1) = (0:1:0)$ dla działania z naszego przykładu nadal zachodzi.

Gładkość. Komórki Białynickiego-Biruli można też zdefiniować w ogólniejszym przypadku, bez zakładania gładkości. Ustalmy tylko $X \subseteq \mathbb{K}\mathbb{P}^n$ spełniający $\mathbb{K}^* \circ X \subseteq X$. Wtedy definiujemy X^+ jako zbiór wszystkich \mathbb{K}^* -niezmienniczych odwzorowań z \mathbb{K} do X . Nie jest jasne, dlaczego na tak określonym zbiorze da się zbudować strukturę przestrzeni. Dopiero W. Drinfeld w roku 2013 dowiódł, że to możliwe. Przestrzeń ta okazała się bardzo użyteczna w badaniu przypadku odległego od gładkiego – w tzw. przestrzeniach moduli. Ale to już temat na inny artykuł.

Zakończenie. Chcielibyśmy zakończyć niniejszy artykuł fragmentem odpowiedzi Andrzeja Szczepana Białynickiego-Biruli na pytanie o pożytki z powszechnego nauczania matematyki, będące częścią przeprowadzonej przez Deltę ankiety (Δ_{95}^{10}):

(...) roli matematyki nie można sprowadzać do znajomości wzorów i faktów. Sądzę, że ważna jest szkoła myślenia, którą daje matematyka każdemu, pewna dyscyplina formułowania i wypowiedzania poglądów i argumentów. Brak takiej dyscypliny może bardzo w życiu przeszkadzać.

Na trzech stronach tego artykułu przebyliśmy dość daleką drogę – od wprowadzającego przykładu o podróżnikach na sferze do analizy bardzo abstrakcyjnych struktur. Mamy nadzieję, że lektura była dla Czytelników dobrym treningiem wspomnianego wyżej matematycznego myślenia.

Andrzej Szczepan Białynicki-Birula zmarł w 2021 r. Od 2022 r. działa Fundacja Jego imienia, wspierająca studentów matematyki i informatyki UW z Białorusi i Ukrainy:
www.mimuw.edu.pl/~fundacja_asbb