Jak na wyświetlaczu

Joanna JASZUŃSKA*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Redaktorka autorskiego działu *Deltoid*, który ukazywał się w *Delcie* w latach 2009–2019.

W artykule *Kto da mniej?* z Δ^{10}_{17} przedstawiłam następującą zagadkę:

Mamy 10 worków z monetami. W dokładnie jednym z nich wszystkie monety są fałszywe, w pozostałych workach wszystkie są prawdziwe. Prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 11. Ile ważeń na wadze elektronicznej trzeba wykonać, aby wykryć worek z fałszywymi monetami?

Wystarczy, oczywiście, dziesięć ważeń: po jednej monecie z każdego worka. A nawet o jedno mniej, bo jeśli pierwszych dziewięć monet jest prawdziwych, dziesiąta musi być fałszywa. Można też sprytniej: wziąć na przykład po jednej monecie z pięciu worków i zobaczyć, czy razem ważą one 50 gramów, czy 51. Takie pomysły pozwalają zawężać grupę podejrzanych worków i ograniczyć się do czterech ważeń (zachęcam do sprawdzenia).

Ciągle jednak nie jest to rozwiązanie optymalne, wystarczy bowiem jedno ważenie! Niech na wadze leżą:

$$\begin{gathered}1 \text{ moneta z worka nr } 1\, + \\ +\ 2 \text{ monety z worka nr } 2\, + \\ +\ 3 \text{ monety z worka nr } 3\, + \\ + \ldots + \\ +\ 10 \text{ monet z worka nr } 10.\end{gathered}$$

Tych 55 monet, gdyby były prawdziwe, ważyłoby $55 \cdot 10 = 550$ gramów. Waga pokazuje wynik o n gramów większy wtedy i tylko wtedy, gdy leży na niej n falsyfikatów. Ostatnia cyfra wyświetlacza wskazuje więc numer szukanego worka. □

Delta, listopad 2005

Rozważmy teraz ogólniejszą wersję tej samej zagadki:

*Mamy 10 worków z monetami. W **niektórych workach** wszystkie monety są fałszywe, w pozostałych wszystkie są prawdziwe. Prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 11. Ile ważeń na wadze elektronicznej trzeba wykonać, aby wykryć worki z fałszywymi monetami?*

Niestety poprzednia metoda tym razem nie zadziała. Jeśli naszych 55 monet teraz waży np. o 7 gramów za dużo, to falsyfikaty mogą równie dobrze być w workach o numerach 2 i 5, jak i w workach 1, 2 i 4 lub w jeszcze innych.

Nadal jednak wystarczy jedno ważenie. Niech tym razem na wadze leżą:

$$\begin{gathered}1 \text{ moneta z worka nr } 1\, + \\ +\ \ 10 \text{ monet z worka nr } 2\, + \\ +\ 100 \text{ monet z worka nr } 3\, + \\ + \ldots + \\ +\ 10^9 \text{ monet z worka nr } 10\, + \\ +\ 1 \text{ odważniczek 1-gramowy.}\end{gathered}$$

Tych 1 111 111 111 monet, gdyby były prawdziwe, ważyłoby 11 111 111 110 gramów, a z odważniczkiem waga wyświetlałaby wynik 11 111 111 111 gramów.

Jeśli przykładowo w worku numer 3 są fałszywe monety, to wynik jest o 100 g za duży: 11 111 111 **2**11. Jeśli ponadto np. w worku 7 też są fałszywe monety, mamy jeszcze o 10^6 g więcej: 11 11**2** 111 **2**11. Z kolei fałszywa moneta z worka numer 1 daje dodatkowo o 1 g więcej: 11 11**2** 111 **2**1**2**.

Ogólniej, n-ta 1 od końca zmienia się na **2** wtedy i tylko wtedy, gdy w n-tym worku są fałszywe monety. Waga znów na swoim wyświetlaczu wskazuje odpowiedź, mianowicie: miejsca zajmowane przez **2**, liczone od prawej strony, to numery fałszywych worków. □

Delta, maj 2006

Czytelnik Realista może czuć się słusznie zaniepokojony propozycją ważenia naraz ponad miliarda monet. Szczęśliwie liczbę tę łatwo zredukować, przeprowadzając analogiczne rozumowanie z użyciem systemu dwójkowego zamiast dziesiętnego. Ważymy wówczas już tylko $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1023$ monety, a przeanalizowanie związanych z tym dalszych niewielkich modyfikacji pozostawiam dociekliwym.

Kolejna zagadka, na pierwszy rzut oka zupełnie inna, ma jednak z poprzednią zaskakująco wiele wspólnego.

Wielomian $w(x)$ to wyrażenie postaci $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie n jest ustaloną liczbą całkowitą nieujemną, *współczynniki* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ są ustalonymi liczbami oraz $a_n \neq 0$. Za x można podstawiać dowolne liczby rzeczywiste i wyznaczać w ten sposób wartości wielomianu. Na przykład wielomian $w(x) = 4x^3 + 17x + 2$ dla $x = 1$ przyjmuje wartość $w(1) = 4 + 17 + 2 = 23$.

Jaś i Małgosia grają w następującą grę. Małgosia wymyśla sobie pewien niezerowy wielomian o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Jaś może pytać o wartości tego wielomianu dla dowolnie wybranych liczb całkowitych. Wygra, gdy poda cały wzór wielomianu. Czy może tego dokonać? Jeśli tak, ile pytań musi zadać?

Pokażemy, że Jaś jest w stanie poznać cały wielomian już po dwóch pytaniach. Na początek Jaś pyta o $w(1)$ i Małgosia podaje mu wartość k, obliczoną ze wzoru

$$w(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0 = k.$$

Oznacza to, że każdy ze współczynników a_i (dla $i = 0, 1, \ldots, n$) jest równy co najwyżej k (bo wszystkie a_i są nieujemne). Niech m będzie liczbą cyfr liczby k. Wówczas każdy ze współczynników a_i ma najwyżej m cyfr.

Następnie Jaś pyta o $w(10^m)$ i poznaje wartość

$$\begin{aligned} w(10^m) &= a_n \cdot (10^m)^n + a_{n-1} \cdot (10^m)^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot (10^m)^2 + a_1 \cdot 10^m + a_0 = \\ &= a_n \cdot 10^{mn} + a_{n-1} \cdot 10^{m(n-1)} + \ldots + a_2 \cdot 10^{m\cdot 2} + a_1 \cdot 10^m + a_0. \end{aligned}$$

Okazuje się, że ta liczba pokazuje Jasiowi po kolei wszystkie współczynniki wielomianu $w(x)$, jak na wyświetlaczu. Zobaczmy na przykładzie, dlaczego tak jest.

Powiedzmy, że Małgosia wymyśliła sobie wielomian $w(x) = 4x^3 + 17x + 2$. Wówczas $w(1) = 4 + 17 + 2 = 23$ i ten wynik poznaje Jaś po pierwszym pytaniu. Wobec tego współczynniki wielomianu są najwyżej dwucyfrowe (bo ich suma to 23). Jaś w drugim pytaniu pyta zatem o $w(10^2)$. Małgosia oblicza:

$$w(100) = 4 \cdot 100^3 + 0 \cdot 100^2 + 17 \cdot 100 + 2, \qquad \text{czyli} \qquad \begin{array}{lr} & 4\ 00\ 00\ 00 \\ & 0\ 00\ 00 \\ & 17\ 00 \\ + & 2 \\ \hline & 4\ 00\ 17\ 02 \end{array}$$

i podaje Jasiowi ten wynik. Zauważmy, że powyższe dodawanie zawsze odbywa się bez przenoszenia, bo każdy ze współczynników a_i ma najwyżej m cyfr. Dlatego właśnie Jaś może po kolei odczytać wszystkie współczynniki wielomianu:

$$\begin{array}{cccc} \underline{4} & \underline{00} & \underline{17} & \underline{02} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Delta, wrzesień 2007

Pozostaje zauważyć, że Jaś nie może zagwarantować sobie zwycięstwa po jednym pytaniu. Dla każdej liczby całkowitej x_1, o którą mógłby spytać, istnieją bowiem dwa różne wielomiany, które mogła wybrać Małgosia, dające tę samą wartość $w(x_1)$, a więc nierozróżnialne dla Jasia po tym jednym pytaniu. Są to mianowicie: wielomian stały $w(x) = |x_1| + 1$ oraz wielomian $w(x) = x + (|x_1| + 1 - x_1)$, oba niezerowe i o współczynnikach całkowitych dodatnich. Podsumowując, Jaś nie może zapewnić sobie zwycięstwa jednym pytaniem, ale dwoma już tak. □

Czytelników Zaawansowanych zachęcam do zastanowienia się nad wariantem tej samej zagadki, w którym Jaś może pytać o wartości wielomianu dla dowolnych liczb, niekoniecznie tylko całkowitych.

Na zakończenie proponuję jeszcze jedną zagadkę, w której też można zastosować pomysł wyświetlacza prezentującego poszukiwaną informację.

Złośliwy czarodziej rzucił urok na jedną z 1000 beczek z winem – każdy, kto wypije choćby kroplę, zzielenieje w ciągu doby. Codziennie rano dysponujemy dokładnie 10 dzielnymi (i niezielonymi) rycerzami gotowymi ponieść ryzyko. Ile dni potrzeba, aby wykryć zaczarowaną beczkę?

Warto dodać, że odpowiedź „trzy dni” nie jest poprawna, a rozwiązanie zainteresowani odnajdą w tekście wspomnianym na początku niniejszego artykułu.