Oczywiście moglibyśmy przyjąć, że $\binom{n}{k} = 0$ dla $n < k$, ale nie chcemy sztucznie rozszerzać zbioru rozwiązań standardowych o kolejne trywialne przypadki.

Warto dodać, że ciąg sum pierwszych trzech elementów kolejnych wierszy w trójkącie Pascala nosi umowną nazwę *the lazy caterer's sequence* i jest znany jako rozwiązanie następującego zadania kombinatorycznego: Jaka jest największa liczba obszarów, na jaką można podzielić płaszczyznę przy użyciu n prostych?

równania jest kwadratem liczby całkowitej w pięciu przypadkach: dla k równego $0, 1, 2, 4$ i 12. Szukane wartości n to, odpowiednio, $0, 1, 2, 5$ i 90 – po odrzuceniu dwóch pierwszych rozwiązań otrzymujemy indeksy wszystkich wierszy trójkąta Pascala, w których sumy pierwszych trzech elementów są potęgami liczby 2. Zauważmy, że ostatnie otrzymane rozwiązanie – $(90, 2, 12)$ – odpowiadające równaniu

$$\binom{90}{0} + \binom{90}{1} + \binom{90}{2} = 1 + 90 + 4005 = 4096 = 2^{12}$$

nie należy do zbioru rozwiązań standardowych! Istnieje jeszcze jedno rozwiązanie niestandardowe – $(23, 3, 11)$:

$$\binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3} = 1 + 23 + 253 + 1771 = 2048 = 2^{11},$$

znane wszystkim, którzy spotkali się z konstrukcją kodu Golaya. Czy istnieją inne wiersze trójkąta Pascala, w których suma pierwszych czterech elementów jest potęgą liczby 2? I ogólniej, czy poza dwoma wskazanymi istnieją inne rozwiązania niestandardowe równania (3)? Kto wie, może odpowiedzi kryją się w innych hipotezach Srinivasy Ramanujana...

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1759. Liczby całkowite dodatnie a i b są takie, że $a + k$ jest podzielne przez $b + k$ dla wszystkich liczb całkowitych $0 < k < b$. Udowodnić, że $a - k$ jest podzielne przez $b - k$ dla dowolnej liczby całkowitej $0 < k < b$.
Rozwiązanie na str. 5

M 1760. Na tablicy napisano parę liczb $(1, 2)$. Gdy para liczb całkowitych (a, b) jest zapisana na tablicy, to możemy jeszcze dopisać parę $(-a, -b)$, a także $(-b, a + b)$. Ponadto, jeśli na tablicy zapisane są pary (a, b) i (c, d), to możemy zapisać również parę $(a + c, b + d)$. Czy para $(2022, 2023)$ może kiedyś pojawić się na tablicy?
Rozwiązanie na str. 5

M 1761. Czy istnieje prostokąt, który można podzielić na 442 prostokąty, a wszystkie one są podobne do wyjściowego, jednak żadne dwa nie są przystające?
Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1081. Woda pozbawiona zanieczyszczeń i pozostawiona bez wstrząsów mechanicznych może zostać ochłodzona do temperatury $T_H \approx 225$ K ($-48°$C) i pozostać w stanie ciekłym (tzw. stan przechłodzenia). W temperaturze $T \leqslant T_H$ w ciekłej wodzie powstają i szybko rosną kryształki lodu. Podobne zjawisko zachodzi, gdy przechłodzoną wodę w temperaturze $T > T_H$ wstrząśniemy, np. wyjmując z zamrażalnika. Jaka masa, m_l, lodu powstanie w butelce zawierającej $m = 0{,}5$ kg wody przechłodzonej w zamrażalniku? Temperatura w zamrażalniku: $T_0 = 263{,}15$ K ($-10°$C). Dane dla wody: temperatura topnienia $T_m = 273{,}15$ K, ciepło topnienia $L = 333{,}6$ J/g, ciepło właściwe przechłodzonej wody $c_w = 4{,}2$ J/(g·K), ciepło właściwe lodu $c_l = 2{,}1$ J/(g·K). Tworzenie i wzrost kryształów lodu są na tyle szybkie, że można pominąć wymianę ciepła z otoczeniem (przez ścianki butelki).
Rozwiązanie na str. 4

F 1082. Po długiej nieobecności wracamy do domu i stwierdzamy, że w naszym pokoju o objętości $V = 60$ m^3 temperatura spadła do wartości $t_p = 0°$C, takiej jak na zewnątrz. Włączamy grzejnik, i po pewnym czasie temperatura osiąga wartość $t_k = 22°$C. Ogrzewanie następuje powoli i przez cały czas ciśnienie wewnątrz pokoju wynosi $p = 10^5$ Pa i jest równe ciśnieniu atmosferycznemu na zewnątrz domu. a) O ile zmieniła się energia wewnętrzna powietrza w pokoju podczas ogrzewania? b) O ile zmieniła się liczba moli powietrza w pokoju? c) Ile ciepła dostarczył grzejnik? W podanym zakresie temperatur powietrze zachowuje się jak gaz idealny (mieszanina gazów o cząsteczkach dwuatomowych: O_2 i N_2). Stała gazowa $R = 8{,}31$ J/(mol·K), temperatura $0°\text{C} = 273{,}15$ K. Pomijamy straty ciepła poprzez ściany i okna pokoju.
Rozwiązanie na str. 16