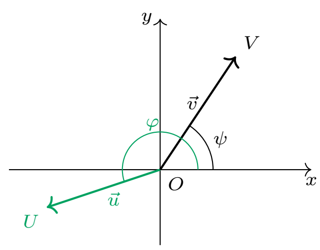
Wektory – część 2

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

W poprzednim kąciku pisałem o podstawach rachunku wektorowego. Tu pójdziemy o krok dalej. Rozważmy niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ na płaszczyźnie. Możemy je tak przesunąć równolegle, by miały wspólny początek: $\vec{u} = \overrightarrow{AU}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AV}$. Niech $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})| = |\sphericalangle UAV| = \alpha$. Dla wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ określamy ich *iloczyn skalarny*

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Jeśli co najmniej jeden z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ jest zerowy, to kąta α nie da się określić, ale długość wektora zerowego wynosi zero – możemy zatem przyjąć, że wtedy iloczyn skalarny również jest zerowy. Kąt pomiędzy wektorami niezerowymi też nie jest jednoznacznie zdefiniowany, bo zamiast α można wziąć $360^\circ - \alpha$. Cosinusy tych kątów są jednak równe, więc nie psuje to powyższej definicji iloczynu skalarnego.



Niech $\vec{u} = (x_u, y_u)$ i $\vec{v} = (x_v, y_v)$ znowu będą niezerowe. Umieśćmy je w układzie współrzędnych w taki sposób, by $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ dla $O = (0, 0)$. Niech φ i ψ będą miarami kątów XOU i XOV, liczonymi od osi OX przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (rysunek). Wtedy $\sin\varphi = \frac{y_u}{|\vec{u}|}$ oraz $\cos\varphi = \frac{x_u}{|\vec{u}|}$, analogicznie dla wektora $\vec{v}$. Bez utraty ogólności niech $\varphi \geqslant \psi$. Wówczas

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi - \psi) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot (\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) = x_u x_v + y_u y_v.$$

Zauważmy, że powyższy wzór jest prawdziwy również wtedy, gdy co najmniej jeden z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ jest zerowy.

Dla wszystkich wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ i skalarów a, b zachodzą równości:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}, \quad (a\vec{u}) \circ (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \circ \vec{v}), \quad \vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}, \quad \vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2.$$

(Nietrudne dowody pozostawiam Czytelnikowi.) Pierwsza z nich to przemienność, druga – zgodność z mnożeniem przez skalar, trzecia – rozdzielność względem dodawania. Te równości są bardzo pomocne w przekształceniach wyrażeń algebraicznych zawierających wektory. W szczególności z pierwszej i trzeciej wynika, że jeśli mnożymy skalarnie sumę wektorów przez sumę wektorów, to możemy zrobić tak samo, jak ze zwykłymi sumami algebraicznymi – pomnożyć każdy składnik przez każdy i wszystko dodać. W szczególności dozwolone jest używanie wzorów skróconego mnożenia.

W praktyce olimpijskiej własności iloczynu skalarnego wykorzystuje się najczęściej do dowodzenia prostopadłości. Niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między nimi ma miarę $\alpha = 90^\circ$ (lub $\alpha = 270^\circ$). Jest to równoważne stwierdzeniu, że $\cos\alpha = 0$, co z kolei jest równoważne temu, że $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$. Krótko mówiąc – prostopadłość prostych AB i CD jest równoważna równości $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CD} = 0$.

Zadania

1. Na płaszczyźnie leżą cztery różne punkty A, B, C, D. Wykazać, że jeśli $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$, to również $BC \perp AD$.
2. Czworokąty $ABCD$ i $APQR$ są kwadratami (kolejność wierzchołków podano przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Punkt M jest środkiem odcinka BR. Dowieść, że $AM \perp DP$.
3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt D jest środkiem odcinka AB, a punkt E jest środkiem ciężkości trójkąta ACD. Udowodnić, że $CD \perp OE$.
4. Boki trójkąta ABC są podstawami trójkątów równoramiennych BCD, CAE, ABF, zbudowanych na zewnątrz niego. Przez punkty A, B, C przeprowadzono proste prostopadłe odpowiednio do odcinków EF, FD, DE. Udowodnić, że te proste przecinają się w jednym punkcie.
5. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie cztery niezerowe wektory na płaszczyźnie, że suma każdych dwóch spośród nich jest prostopadła do sumy dwóch pozostałych.
6. W czworościanie $ABCD$ zachodzi równość $|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle BAD| = 180^\circ$. Dwusieczna kąta CAD przecina odcinek CD w punkcie K. Wykazać, że kąt BAK jest prosty.

Wskazówki do zadań

1. Przyjmijmy $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. Mamy wtedy $(\vec{a} - \vec{b}) \circ \vec{c} = (\vec{a} - \vec{c}) \circ \vec{b} = 0$. Należy z tego wywnioskować, że $(\vec{b} - \vec{c}) \circ \vec{a} = 0$.

2. Niech $\vec{u_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{u_2} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v_1} = \overrightarrow{AR}$, $\vec{v_2} = \overrightarrow{AP}$. Mamy wykazać, że $(\vec{u_2} - \vec{v_2}) \circ (\vec{u_1} + \vec{v_1}) = 0$, co sprowadza się do równości $\vec{u_1} \circ \vec{v_2} = \vec{u_2} \circ \vec{v_1}$.

3. Wygodnie przyjąć $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, a następnie wyrazić za ich pomocą wektory $\overrightarrow{OE}$ i $\overrightarrow{CD}$. W dowodzeniu, że $\overrightarrow{OE} \circ \overrightarrow{CD} = 0$ pomocne będą równości: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ oraz $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{c}$.

4. Niech P będzie punktem przecięcia tych prostych z zadania, które przechodzą przez A i B. Trzeba udowodnić, że trzecia prosta przechodzi przez punkt P, co jest równoważne stwierdzeniu $CP \perp DE$. Niech $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ oraz $\vec{d} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{e} = \overrightarrow{FD}$, $\vec{f} = \overrightarrow{DE}$. Można udowodnić, że $\overrightarrow{CP} \circ \vec{f} = \vec{a} \circ \vec{e} - \vec{b} \circ \vec{d}$. Niech X, Y, Z będą środkami odcinków odpowiednio BC, CA, AB. Kładąc $\vec{d} = \overrightarrow{EY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZF}$ i $\vec{e} = \overrightarrow{FZ} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{XD}$, otrzymamy $\vec{a} \circ \vec{e} = \vec{b} \circ \vec{d}$.

5. Istnieją. Niech D będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC, a K – dowolnym punktem na tym okręgu. Wtedy wektory $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KD}$ spełniają żądane warunki.

6. Niech M i N będą takimi punktami na odcinkach AC i AD, że $KM \parallel AD$ i $KN \parallel AC$. Wtedy czworokąt $AMKN$ jest rombem. Dobrze będzie przyjrzeć się iloczynom skalarnym $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AN}$.