

Twierdzenie Ramanujana–Nagella i trójkąt Pascala

* Wydział Matematyki Stosowanej,
Politechnika Śląska

Opisywane zagadnienie figuruje jako
Question 464 w słynnym dziele
Collected papers of Srinivasa Ramanujan
z 1927 roku.



Rozwiązanie zadania F 1081.

Tworzeniu lodu towarzyszy wydzielenie ciepła topnienia powodujące ogrzewanie wody i lodu. Masa lodu będzie rosła, dopóki mieszanina wody i lodu nie osiągnie temperatury topnienia $T_m = 273,15 \text{ K}$ (0°C). Gdyby ciepła właściwe lodu i wody były jednakowe, to mielibyśmy:
 $Lm_l = mc_w(T_m - T_0)$, czyli
 $m_l = mc_w(T_m - T_0)/L \approx 0,063 \text{ kg}$.
Ciepło właściwe lodu jest jednak mniejsze niż wody. Przeanalizujemy teraz skrajną sytuację – w temperaturze początkowej T_0 od razu powstaje „cały lód”, tzn. powstaje go tyle, że uwolnione ciepło topnienia ogrzewa lód i pozostawia wodę do temperatury dokładnie równej T_m . Mielibyśmy warunek:

$Lm_l = ((m - m_l)c_w + m_l c_l)(T_m - T_0)$,
czyli:

$$m_l = \frac{mc_w(T_m - T_0)}{L + (c_w - c_l)(T_m - T_0)},$$

co daje $m_l \approx 0,059 \text{ kg}$. Rzeczywista masa lodu znajduje się więc pomiędzy $0,059 \text{ kg}$ i $0,063 \text{ kg}$. Dokładna analiza musi uwzględnić to, że kolejne porcje lodu powstają w coraz wyższej temperaturze. Utworzeniu porcji dm_l lodu towarzyszy wzrost temperatury mieszaniny o dT , co prowadzi do równania:

$$Ldm_l = (m - m_l)c_w dT + m_l c_l dT = \\ = (mc_w + (c_l - c_w)m_l)dT,$$

a więc

$$(*) \quad \frac{dm_l}{dT} = \frac{mc_w + (c_l - c_w)m_l}{L},$$

przy czym w chwili początkowej mamy $m_l = 0$ i $T = T_0$. Rozwiązaniem równania (*), co łatwo sprawdzić, jest:

$$m_l(T) = \frac{c_w m}{c_w - c_l} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{(c_l - c_w)(T - T_0)}{L}\right) \right),$$

a proces zakończy się, gdy $T = T_m$. Dla $T = T_m$ po podstawieniu pozostałych danych liczbowych otrzymujemy $m_l \approx 0,061 \text{ kg}$. Gęstość lodu jest o około 8% mniejsza niż wody, co oznacza, że końcowa objętość mieszaniny będzie o około $5,6 \text{ cm}^3$ większa od początkowej objętości przechłodzonej cieczy. Podane w treści zadania ciepła właściwe odpowiadają zakresowi temperatur od -10° do 0° dla lodu i od -10° do 100° dla wody w stanie ciekłym – w tych zakresach temperatur zmiany obu wielkości nie przekraczają $0,1 \text{ J}/(\text{g}\cdot\text{K})$.

Bartłomiej PAWLIK*, Witold TOMASZEWSKI*

Historia pewnego twierdzenia. Spuścizną Srinivasy Ramanujana są nie tylko głębokie teorioliczne twierdzenia, ale również liczne hipotezy stanowiące wyzwania dla kolejnych pokoleń matematyków. Jedno z wielu pytań postawionych przez genialnego hinduskiego samouka, datowane na 1913 rok, dotyczyło wyrażenia $2^s - 7$. Ramanujan zauważył, że jest ono kwadratem liczby całkowitej dla s równego 3, 4, 5, 7 i 15, i chciał wiedzieć, czy istnieją inne całkowite wartości s o tej własności.

W 1959 roku norweski matematyk Thoralf Skolem i jego dwóch amerykańskich kolegów, Sarvadaman Chowla i D.J. Lewis, na łamach *Proceedings of the AMS* wykazali, że nie ma więcej rozwiązań. Rok później Trygve Nagell, krajan Skolema, przedstawił swoje rozwiązanie problemu Ramanujana. Jak się okazało, kolejny dowód jest zarówno prostszy, jak i... starszy! Nagell opublikował rozwiązanie już w 1948 roku w pracy napisanej po norwesku, co skutecznie utrudniło wynikowi przebicie się do świadomości ogółu matematycznej społeczności.

Jeden z autorów niniejszego artykułu zauważył pewną własność trójkąta Pascala, wynikającą z twierdzenia Ramanujana–Nagella. Zanim jednak ją zaprezentujemy, przyjrzymy się pokrótce pierwszym dowodom tego twierdzenia i omówimy jego dalsze losy. Zaczniemy od przedstawienia pewnych podstawowych faktów z zakresu algebry abstrakcyjnej.

Słów kilka o pierścieniach. Na potrzeby tego artykułu pierścien wystarczy rozumieć jako zbiór, do którego należą suma, różnica i iloczyn każdej pary jego elementów – reprezentatywnym przykładem jest pierścień liczb całkowitych. Jak wiemy, każdą liczbę całkowitą różną od 0, 1 i -1 można jednoznacznie rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych (jeżeli rozważana liczba jest ujemna, to na czynniki pierwsze rozkładamy jej moduł i wynik mnożymy przez -1). W terminologii algebraicznej oznacza to, że pierścień liczb całkowitych ma własność *jednoznaczności rozkładu*. Idąc dalej tym tropem, liczby pierwsze nazywamy *elementami nierozkładalnymi* pierścienia liczb całkowitych. Już w XIX wieku zauważono, że nie we wszystkich pierścieniach rozkład na elementy nierozkładalne jest jednoznaczny. Warto tu wspomnieć, że żyjący kilkadziesiąt lat wcześniej wybitny matematyk Leonhard Euler chyba o tym nie wiedział, w efekcie popełniając swój słynny błąd w dowodzie szczególnego przypadku Wielkiego Twierdzenia Fermata (wtedy jeszcze hipotezy) dla $n = 3$. Używając współczesnej terminologii, można napisać, iż Euler nieopatrznie założył, że pierścień liczb postaci $\alpha + \beta \cdot i\sqrt{3}$ (α i β są liczbami całkowitymi, $i^2 = -1$) ma własność jednoznaczności rozkładu. Nie jest to prawdą – przykładowo

$$4 = 2 \cdot 2 = (1 + i\sqrt{3}) \cdot (1 - i\sqrt{3}).$$

Dodajmy, że rozumowanie Eulera można łatwo naprawić, korzystając z metod opisanych w jego pracach, więc często przyznaje się mu autorstwo poprawnego dowodu.

Dwa dowody. Rozwiązania Skolema i Nagella zaczynają się bardzo podobnie. Rozważamy równanie $x^2 + 7 = 2^s$. Jeśli s jest liczbą parzystą, to po przekształceniu otrzymujemy $(2^{s/2} - x)(2^{s/2} + x) = 7$. To daje nam dwie możliwości:

$$\begin{cases} 2^{s/2} - x = 1 \\ 2^{s/2} + x = 7 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2^{s/2} - x = 7 \\ 2^{s/2} + x = 1 \end{cases},$$

z których wynika, że $s = 4$ oraz $x = \pm 3$. (Potencjalnie wszystkie liczby pojawiające się po prawej stronie powyższych układów równań mogłyby być ujemne, ale po ich zsumowaniu doszlibyśmy do sprzeczności).

Założmy teraz, że liczba s jest nieparzysta. Równanie $x^2 = 2^s - 7$ przekształcamy do postaci

$$\frac{x^2 + 7}{4} = 2^t \quad \text{dla } t = s - 2,$$

Równość $\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1-i\sqrt{7}}{2} = 2$ pokazuje nieco zaskakujący fakt, że liczba 2 w rozważanym pierścieniu nie jest nierozkładalna!

a następnie obie strony tego równania rozkładamy na iloczyn:

$$\frac{x+i\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{x-i\sqrt{7}}{2} = \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t \cdot \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^t.$$

Wszystkie otrzymane ułamki należą do pierścienia liczb postaci $\alpha + \beta \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ (gdzie α, β są liczbami całkowitymi). Jak się okazuje, ten pierścień ma własność jednoznaczności rozkładu, a wśród elementów nierozkładalnych są $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ oraz $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$. Z faktów tych wynika, że zachodzi jedna z czterech możliwości opisanych skrótowo poniższymi równaniami:

$$(1a) \quad \frac{x \pm i\sqrt{7}}{2} = \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t \quad (1b) \quad \frac{x \pm i\sqrt{7}}{2} = -\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t.$$

Możemy ograniczyć się do analizy (1a), gdyż rozwiązania (1b) uzyskujemy z rozwiązań (1a) poprzez zmianę znaku przy x . Od tego miejsca dowody idą innymi drogami.

Chowla, Lewis i Skolem obliczają kolejne potęgi liczby $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ i zauważają, że jeśli potęga ma postać $\frac{x \pm i\sqrt{7}}{2}$, to $x = 1, -3, -5, 11$ lub -181 , co odpowiada rozwiązaniom wskazanym przez Ramanujana. Przykładowo

$$\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^{13} = \frac{-181-i\sqrt{7}}{2}$$

i liczba 181 spełnia równanie $181^2 = 2^{15} - 7$. Uzasadnienie, że nie ma więcej rozwiązań, opiera się na opracowanej przez Skolema metodzie korzystającej z własności liczb p -adycznych.

Nagell natomiast analizuje równanie (1a) oraz wynikające z niego dla $t > 1$

$$(2) \quad \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^t - \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^t = \pm i\sqrt{7}.$$

Dalej argumentuje, że prawa strona powyższej równości musi być równa $-i\sqrt{7}$. (Należy w tym celu rozpatrzyć ją modulo $\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^2$, nie będziemy tu jednak wchodzić w szczegóły tego odrobinkę bardziej wyszukanego argumentu). Ze wzoru dwumianowego Newtona wynika, że

$$(a+b)^t - (a-b)^t = 2 \cdot \left(\binom{t}{1} a^{t-1} b + \binom{t}{3} a^{t-3} b^3 + \dots + \binom{t}{t} b^t \right).$$

Stosując tę zależność w równaniu (2), otrzymujemy

$$2 \cdot \frac{\binom{t}{1}(i\sqrt{7}) + \binom{t}{3}(i\sqrt{7})^3 + \dots + \binom{t}{t}(i\sqrt{7})^t}{2^t} = -i\sqrt{7},$$

a stąd

$$\binom{t}{1} + \binom{t}{3}(i\sqrt{7})^2 + \dots + \binom{t}{t}(i\sqrt{7})^{t-1} = -2^{t-1}.$$

Pamiętając, że $i^2 = -1$ oraz że wszystkie wykładniki po lewej stronie są parzyste, otrzymujemy równanie:

$$(*) \quad \binom{t}{1} - \binom{t}{3}7 + \binom{t}{5}7^2 + \dots \pm \binom{t}{t}7^{\frac{t-1}{2}} = -2^{t-1},$$

z którego w szczególności wynika

$$t \equiv -2^{t-1} \pmod{7}.$$

Podstawmy $t = 42k + r$ dla r spełniającego $0 \leq r < 42$. Wówczas $t \equiv r \pmod{7}$. Ponadto na mocy małego twierdzenia Fermata: $2^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$, więc $2^t \equiv 2^r \pmod{7}$. Otrzymujemy zatem $r \equiv -2^{r-1} \pmod{7}$.

Łatwo można sprawdzić, że jedyne rozwiązania tej kongruencji to $r = 3, 5, 13$. Nagell pokazuje, że w każdym z tych przypadków, aby spełnione było równanie (*), musi zachodzić $t = r$, co odpowiada rozwiązaniom $s = 5, 7, 15$.

Osobno należy rozpatrzyć łatwy przypadek $t = 1$, dla którego równanie (2) nie jest spełnione. Ten przypadek daje rozwiązanie $s = 3$.

A po dowodach... Od tamtej pory rozważane twierdzenie doczekało się kilkunastu kolejnych uzasadnień i wielu uogólnień. W tej historii znajduje



Rozwiązanie zadania M 1759. Zauważmy, że z warunków zadania dla dowolnego $0 < k < b$ zachodzi:

$$b+k \mid (a+k) - (b+k) = a-b.$$

Ustalmy liczbę całkowitą $0 < k < b$.

Ponieważ $\frac{b+k}{b-k} - \frac{k}{b-k} > 1$, to istnieje

liczba całkowita $n \in \left(\frac{k}{b-k}, \frac{b+k}{b-k}\right)$. Wtedy

liczba $m = n(b-k) - k$ spełnia

nierówności $0 < m < b$.

Na mocy uwagi poczynionej na początku

$b+m \mid a-b$, jednakże

$b+m = (n+1)(b-k)$, skąd dla

dowolnego $0 < k < b$ mamy

$b-k \mid b+m \mid a-b$, więc

$$b-k \mid (a-b) + (b-k) = a-k.$$



Rozwiązanie zadania M 1760.

Udowodnimy, że dla dowolnej pary (x, y)

zapisanej na tablicy liczba $2x - y$ jest

podzielna przez 7. Dla ułatwienia zapisu

podzielność tę oznaczmy jako $T(x, y)$.

Rzeczywiście, zachodzi $T(1, 2)$, gdyż

$2 \cdot 1 - 2 = 0$. Zauważmy, że

$$2 \cdot (-a) - (-b) = -(2a - b)$$

$$2 \cdot (-b) - (a+b) = 3(2a - b) - 7a,$$

zatem z $T(a, b)$ wynika $T(-a, -b)$ oraz

$T(-b, a+b)$. Ponadto

$$2(a+c) - (b+d) = (2a-b) + (2c-d)$$

i dlatego z $T(a, b)$ i $T(c, d)$ wynika

$T(a+c, b+d)$. Dowodzi to, że zachodzi

$T(x, y)$ dla każdej pary (x, y) , którą

można napisać na tablicy.

Ponieważ liczba $2 \cdot 2022 - 2023 = 2021$ nie

jest podzielna przez 7, ta para nie może

pojawić się na tablicy.

Więcej o dowodach i uogólnieniach można przeczytać w przeglądowej pracy *On the Ramanujan-Nagell Equation and its Generalisations* autorstwa Edwarda L. Cohena.

się również akcent polski: w 1956 roku Jerzy Browkin i Andrzej Schinzel rozwiązali równanie diofantyczne $2^x - 1 = y(y + 1)/2$, a kilka lat później wykazali równoważność swojego rozwiązania z twierdzeniem Ramanujana–Nagella.

Najpopularniejsze zastosowanie rozważanego twierdzenia dotyczy teorii kodów korekcyjnych. Otrzymane rozwiązania pozwalają na konstruowanie zbioru C , złożonego z ciągów binarnych długości n o następującej własności:

każdy ciąg binarny długości n różni się o co najwyżej dwa znaki od dokładnie jednego ciągu $c \in C$.

Powyższa własność pozwala na poprawianie błędów w każdym otrzymanym ciągu, a jeżeli w trakcie transmisji, po wysłaniu pewnego ciągu $c \in C$, popełniono co najwyżej dwa błędy, to poprawiony ciąg będzie zgodny z tym, który został wysłany. Dodajmy, że jeżeli x, s spełniają równanie $x^2 = 2^s - 7$, to ciągi, o których tu mowa, mają długość $n = \frac{x-1}{2}$, a zbiór C ma 2^{s-3} elementów.

A co to wszystko ma wspólnego z trójkątem Pascala? Przyjmijmy konwencję indeksowania wierszy trójkąta Pascala od 0, a nie od 1. Jak wiemy, suma wszystkich liczb w n -tym wierszu trójkąta Pascala jest n -tą potęgą liczby 2, co można wyrazić równaniem

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

A czy w wierszach trójkąta Pascala istnieją jakieś sumy częściowe, które również są pewnymi potęgami liczby 2? Ujmując to bardziej formalnie: interesuje nas opisanie zbioru wszystkich trójek (n, s, k) liczb naturalnych takich, że $s \leq n$ oraz

$$(3) \quad \sum_{i=0}^s \binom{n}{i} = 2^k.$$

Oczywiście dla każdego n do rozważanego zbioru należą trójki $(n, 0, 0)$ oraz (n, n, n) . Dodatkowo możemy do niego dołożyć nieskończenie wiele trójek postaci $(2^k - 1, 1, k)$, ponieważ

$$\sum_{i=0}^1 \binom{2^k - 1}{i} = \binom{2^k - 1}{0} + \binom{2^k - 1}{1} = 1 + 2^k - 1 = 2^k.$$

Ostatni typowy podzbiór rozwiązań stanowią pary $(2s + 1, s + 1, 2s)$, co wynika z następującego wnioskowania. Jak wcześniej wspomnieliśmy, suma wszystkich elementów w wierszu jest potęgą liczby 2. Wiemy również, że elementy w każdym wierszu ułożone są symetrycznie – fakt ten można uzasadnić wzorem $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Zatem dla $n = 2s + 1$ wiersz zawiera dokładnie $2s + 2$ elementów, a suma elementów w tym wierszu wynosi 2^{2s+1} . Rozpatrywana suma połowy z nich jest połową sumy wszystkich elementów, więc wynosi 2^{2s} .

Reasumując, jak dotąd ustaliliśmy, że rozwiązaniami równania (3) są trójki

- $(n, 0, 0)$ – przypadek trywialny, pierwszy element w każdym wierszu trójkąta Pascala to 2^0 ;
- $(2^k - 1, 1, k)$ – suma dwóch początkowych elementów w wierszu trójkąta Pascala w nieskończenie wielu przypadkach jest potęgą liczby 2;
- $(2s + 1, s + 1, 2s)$ – suma połowy wszystkich elementów w wierszach zawierających parzystą liczbę elementów jest potęgą liczby 2;
- (n, n, n) – suma wszystkich elementów w każdym wierszu jest potęgą liczby 2.

Wszystkie powyższe rozwiązania będziemy nazywać rozwiązaniami *standardowymi*. Czy istnieją jakieś inne rozwiązania?

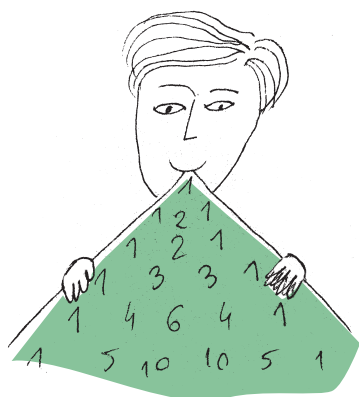
Jak się okazuje, twierdzenie Ramanujana–Nagella rozstrzyga powyższe pytanie dla $s = 2$. Zauważmy, że w tym przypadku interesuje nas równanie

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 2^k,$$

które można łatwo przekształcić do postaci

$$(2n + 1)^2 = 2^{k+3} - 7.$$

Z twierdzenia Ramanujana–Nagella wynika, że prawa strona otrzymanego



Oczywiście moglibyśmy przyjąć, że $\binom{n}{k} = 0$ dla $n < k$, ale nie chcemy sztucznie rozszerzać zbioru rozwiązań standardowych o kolejne trywialne przypadki.

Warto dodać, że ciąg sum pierwszych trzech elementów kolejnych wierszy w trójkącie Pascala nosi umowną nazwę *the lazy caterer's sequence* i jest znany jako rozwiązanie następującego zadania kombinatorycznego: Jaka jest największa liczba obszarów, na jaką można podzielić płaszczyznę przy użyciu n prostych?

równania jest kwadratem liczby całkowitej w pięciu przypadkach: dla k równego 0, 1, 2, 4 i 12. Szukane wartości n to, odpowiednio, 0, 1, 2, 5 i 90 – po odrzuceniu dwóch pierwszych rozwiązań otrzymujemy indeksy wszystkich wierszy trójkąta Pascala, w których sumy pierwszych trzech elementów są potęgami liczby 2. Zauważmy, że ostatnie otrzymane rozwiązanie – (90, 2, 12) – odpowiadające równaniu

$$\binom{90}{0} + \binom{90}{1} + \binom{90}{2} = 1 + 90 + 4095 = 4996 = 2^{12}$$

nie należy do zbioru rozwiązań standardowych! Istnieje jeszcze jedno rozwiązanie niestandardowe – (23, 3, 11):

$$\binom{23}{0} + \binom{23}{1} + \binom{23}{2} + \binom{23}{3} = 1 + 23 + 253 + 1771 = 2048 = 2^{11},$$

znane wszystkim, którzy spotkali się z konstrukcją kodu Golaya. Czy istnieją inne wszystkie trójkąta Pascala, w których suma pierwszych czterech elementów jest potęgą liczby 2? I ogólniej, czy poza dwoma wskazanymi istnieją inne rozwiązania niestandardowe równania (3)? Kto wie, może odpowiedzi kryją się w innych hipotezach Srinivasy Ramanujana...



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1759. Liczby całkowite dodatnie a i b są takie, że $a + k$ jest podzielne przez $b + k$ dla wszystkich liczb całkowitych $0 < k < b$. Udowodnić, że $a - k$ jest podzielne przez $b - k$ dla dowolnej liczby całkowitej $0 < k < b$.

Rozwiązanie na str. 5

M 1760. Na tablicy napisano parę liczb (1, 2). Gdy para liczb całkowitych (a, b) jest zapisana na tablicy, to możemy jeszcze dopisać parę $(-a, -b)$, a także $(-b, a + b)$. Ponadto, jeśli na tablicy zapisane są pary (a, b) i (c, d) , to możemy zapisać również parę $(a + c, b + d)$. Czy para (2022, 2023) może kiedyś pojawić się na tablicy?

Rozwiązanie na str. 5

M 1761. Czy istnieje prostokąt, który można podzielić na 442 prostokąty, a wszystkie one są podobne do wyjściowego, jednak żadne dwa nie są przystające? Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1081. Woda pozbawiona zanieczyszczeń i pozostawiona bez wstrząsów mechanicznych może zostać ochłodzona do temperatury $T_H \approx 225$ K (-48°C) i pozostać w stanie ciekłym (tzw. stan przechłodzenia). W temperaturze $T \leq T_H$ w ciekłej wodzie powstają i szybko rosną kryształki lodu. Podobne zjawisko zachodzi, gdy przechłodzoną wodę w temperaturze $T > T_H$ wstrząśniemy, np. wyjmując z zamrażalnika. Jaka masa, m_l , lodu powstanie w butelce zawierającej $m = 0,5$ kg wody przechłodzonej w zamrażalniku? Temperatura w zamrażalniku: $T_0 = 263,15$ K (-10°C). Dane dla wody: temperatura topnienia $T_m = 273,15$ K, ciepło topnienia $L = 333,6$ J/g, ciepło właściwe przechłodzonej wody $c_w = 4,2$ J/(g·K), ciepło właściwe lodu $c_l = 2,1$ J/(g·K). Tworzenie i wzrost kryształów lodu są na tyle szybkie, że można pominąć wymianę ciepła z otoczeniem (przez ścianki butelki).

Rozwiązanie na str. 4

F 1082. Po długiej nieobecności wracamy do domu i stwierdzamy, że w naszym pokoju o objętości $V = 60$ m³ temperatura spadła do wartości $t_p = 0^\circ\text{C}$, takiej jak na zewnątrz. Włączamy grzejnik, i po pewnym czasie temperatura osiąga wartość $t_k = 22^\circ\text{C}$. Ogrzewanie następuje powoli i przez cały czas ciśnienie wewnątrz pokoju wynosi $p = 10^5$ Pa i jest równe ciśnieniu atmosferycznemu na zewnątrz domu. a) O ile zmieniła się energia wewnętrzna powietrza w pokoju podczas ogrzewania? b) O ile zmieniła się liczba moli powietrza w pokoju? c) Ile ciepła dostarczył grzejnik? W podanym zakresie temperatur powietrze zachowuje się jak gaz idealny (mieszanina gazów o cząsteczkach dwuatomowych: O₂ i N₂). Stała gazowa $R = 8,31$ J/(mol·K), temperatura $0^\circ\text{C} = 273,15$ K. Pomijamy straty ciepła poprzez ściany i okna pokoju.

Rozwiązanie na str. 16

