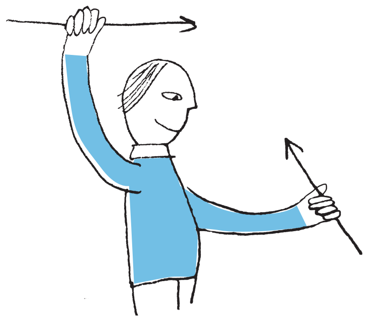
Wektory – część 1

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Wektory są obiektami z pogranicza dwóch światów – algebraicznego i geometrycznego. Całą filozofię stosowania rachunku wektorowego do rozwiązywania zadań z geometrii można streścić w jednym zdaniu: pozwalają one zamienić problem geometryczny na problem czysto algebraiczny. Tutaj wymienimy kilka podstawowych własności wektorów, pomijając uzasadnienia – Czytelnik może uzupełnić je samodzielnie lub znaleźć w dobrym podręczniku do geometrii analitycznej.

Zacznijmy od geometrii. Niech $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie. Przez *wektor* $\overrightarrow{AB}$ rozumieć będziemy odcinek z wyróżnionym początkiem A i końcem B. Wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{A_2B_2}$ uznajemy za *równe*, jeżeli środki odcinków A_1B_2 oraz A_2B_1 pokrywają się. Wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ nazywamy *przeciwnymi*. Szczególnym przypadkiem wektora jest *wektor zerowy* $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$.



Z punktu widzenia algebry wektorem na płaszczyźnie będziemy nazywać *uporządkowaną parę liczb rzeczywistych*: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_v, y_v)$. Jednej parze uporządkowanej (x_v, y_v) odpowiada nieskończenie wiele odcinków $\overrightarrow{AB}$ i każde dwa z nich są równe w sensie opisanym w poprzednim akapicie. *Wektorem przeciwnym* do $\vec{v} = (x_v, y_v)$ jest $-\vec{v} = (-x_v, -y_v)$.

Dodawanie wektorów i mnożenie ich przez *skalar* (liczbę) łatwo się definiuje dla postaci algebraicznej:

$$(x_u, y_u) + (x_v, y_v) = (x_u + x_v,\ y_u + y_v), \qquad a(x_v, y_v) = (ax_v, ay_v).$$

Dla wszystkich wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ oraz skalarów a, b zachodzą równości:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \qquad (ab)\vec{v} = a(b\vec{v}),$$
$$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}, \quad a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}.$$

Pierwsza to przemienność, kolejne dwie to prawa łączności, a ostatnie dwie – prawa rozdzielności. Dzięki powyższym własnościom możemy wykonywać działania na wektorach praktycznie tak samo jak na liczbach.

Jeśli wybierzemy punkty A, B, C, dla których $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, to $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Nazywamy to *regułą trójkąta*. Wynika z niej w szczególności, że $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. Jeżeli zatem mamy wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ spełniające równość $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, to możemy utworzyć z nich trójkąt (być może zdegenerowany), przesuwając je równolegle. Stosując równość $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ oraz indukcję, dowodzimy, że $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ lub równoważnie $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$.

Długością wektora $\vec{v} = (x_v, y_v) = \overrightarrow{AB}$ nazywamy liczbę $|\vec{v}| = |AB| = \sqrt{x_v^2 + y_v^2}$. Dla każdego rzeczywistego a zachodzi równość $|a\vec{v}| = |a| \cdot |\vec{v}|$. Dla $a > 0$ wektor $a\vec{v}$ ma ten sam zwrot co wektor $\vec{v}$, dla $a < 0$ – przeciwny. Na koniec: $0\,\vec{v} = \vec{0}$. Niezerowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są *równoległe* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki skalar a, że $\vec{u} = a\vec{v}$. Zachodzi *nierówność trójkąta* $|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$, a indukcyjnie można wykazać, że $|\vec{v_1} + \vec{v_2} + \ldots + \vec{v_n}| \leqslant |\vec{v_1}| + |\vec{v_2}| + \ldots + |\vec{v_n}|$.

Zadania

1. Punkty A, B, C, D leżą na płaszczyźnie. Punkty M i N są środkami odcinków odpowiednio AB i CD. Udowodnić, że $2|MN| \leqslant |BC| + |DA|$.
2. Udowodnić, że $\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} < \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}$ dla a, b, c będących długościami boków trójkąta.
3. Czworokąty $APQB$, $BRSC$ i $CTUA$ są równoległobokami. Wykazać, że z odcinków QR, ST, UP można zbudować trójkąt (być może zdegenerowany).
4. Pięć różnych punktów A, B, C, D, E leży na płaszczyźnie. Punkty K, L, M, N są środkami odcinków odpowiednio AB, BC, CD, DE. Punkty P, Q są środkami odcinków odpowiednio KM, LN. Udowodnić, że $PQ \parallel AE$.
5. Punkty E, F, G leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, przy czym $2|AG| = |GB|$, $2|BE| = |EC|$ oraz $2|CF| = |FA|$. Punkty P i Q leżą na odcinkach odpowiednio EG i FG, przy czym $2|EP| = |PG|$ oraz $2|GQ| = |QF|$. Dowieść, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.

Wskazówki do zadań

1. Dodać stronami równości: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ i $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

2. Rozważmy trójkąt ABC o bokach długości $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ i ich środkach A_1, B_1, C_1. Ze wzoru na długość mediany zachodzi równość $\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 2|AA_1|$ oraz dwie analogiczne. Wystarczy wykazać, że $2\overrightarrow{AA_1} + 2\overrightarrow{BB_1} + 2\overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

3. Można zapisać $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BR}$ i dwie równości analogiczne. Otrzymamy $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{UP} = \vec{0}$.

4. Niech $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AE}$. Za pomocą tych wektorów można wyrazić $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, a następnie $\overrightarrow{AP}$ i $\overrightarrow{AQ}$.

5. Wygodnie przyjąć oznaczenia $\vec{u} = \overrightarrow{AG}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BE}$, $\vec{w} = \overrightarrow{CF}$, bo wtedy $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$. Możemy za ich pomocą wyrazić wektory $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AG}$ i $\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BE}$, a następnie $\overrightarrow{QP}$ wyrazić przez $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{GE}$.