Wariant z monetą opisany jest w artykule: Steven Tijms, *The Mathematical Anatomy of the Gambler's Fallacy* https://chance.amstat.org/2022/02/gamblers-fallacy/.

Powyżej przeanalizowaliśmy przykład z kostką, ale gdy powrócimy do pierwotnego problemu z monetą, to szansa na takie zdarzenie wzrasta do 97%! Nareszcie dowiedzieliśmy się więc, dlaczego aby sprawdzić, kto wykonał zadanie, nauczyciel patrzył, czy na kartce danego ucznia występuje seria pięciu, sześciu lub siedmiu takich samych wyników pod rząd. Jeśli takowej nie było, statystycznie oznaczało to oszustwo.

Mały krok dla człowieka, wielki skok dla indukcji

*Michał MIŚKIEWICZ**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

W niektórych kręgach popularny jest dowcip o nieskończonej pojemności tramwaju. Opiera się on na dwóch empirycznych przesłankach: (1) w tramwaju na pewno mieści się jedna osoba, (2) nieważne, ile osób już jest w tramwaju, zawsze zmieści się jeszcze jedna. To, że w tramwaju mieści się dowolnie dużo osób, gwarantuje wówczas *zasada indukcji matematycznej.* Dowcip ten może śmieszyć lub nie, ale dobrze oddaje ideę indukcji – w matematyce pozwala ona uściślić rozumowanie oparte na użyciu wielokropka czy też sformułowania *i tak dalej.* Na przykład takie:

Zadanie 1. Dowieść, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ liczba 2^n ma n-cyfrową wielokrotność, w której zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 1 i 2.

Rozwiązanie. Dla $n = 1$ szukaną wielokrotnością liczby 2 jest choćby ona sama. Dla $n = 2$ wystarczy dostawić jedynkę z przodu (12 jest wielokrotnością 4), podobnie dla $n = 3$ ($8 \mid 112$). Dla $n = 4$ nie możemy dostawić jedynki, ale dwójkę już tak: $16 \mid 2112$. I tak dalej – jeśli a_n jest szukaną wielokrotnością 2^n, to w następnym kroku możemy wziąć $10^n + a_n$ (gdy $2^{n+1} \nmid a_n$) lub $2 \cdot 10^n + a_n$ (gdy $2^{n+1} \mid a_n$). $\square$

Rygorystyczny dowód musiałby oprzeć się na zasadzie indukcji, którą sformułujemy następująco:

Twierdzenie 1: zasada indukcji matematycznej. *Dany jest ciąg warunków $T(1), T(2), \ldots$ odpowiadających kolejnym liczbom naturalnym. Załóżmy, że:*

(I1) *zachodzi warunek $T(1)$,*
(I2) *z warunku $T(n)$ wynika warunek $T(n+1)$.*

Wtedy zachodzą warunki $T(n)$ dla wszystkich liczb naturalnych.

Jarosław Wróblewski, *Opowieści o indukcji*, Materiały Ligi Zadaniowej OMG 2012/13 omj.edu.pl/uploads/attachments/indukcja.pdf.

Bartłomiej Bzdęga, *Trzy rodzaje indukcji matematycznej*, Kącik Początkującego Olimpijczyka nr 7, Δ^7_{19}.

W zadaniu 1 warunek $T(n)$ brzmiałby następująco: istnieje n-cyfrowa wielokrotność 2^n złożona z cyfr 1 i 2. Więcej przykładów można znaleźć w znakomitych *Opowieściach o indukcji* Jarosława Wróblewskiego oraz w *Kąciku* Bartłomieja Bzdęgi (zob. margines). Tymczasem pójdźmy dalej i zadajmy pytanie:

Czy podobne rozumowanie oparte na *małych krokach* można stosować w innych przypadkach? W szczególności, czy da się w ten sposób dowodzić własności liczb rzeczywistych?

I od razu odpowiedzmy: tak! Matematycy bardzo lubią sprowadzać duże problemy do małych, i twierdzenia podobne do zasady indukcji można odnaleźć w różnych działach matematyki. W niniejszym artykule dokonamy pobieżnego przeglądu takich twierdzeń.

Indukcja pozaskończona

Zasadę indukcji można wyprowadzić z następującej własności liczb naturalnych: każdy podzbiór liczb naturalnych posiada element najmniejszy. Rzeczywiście, jeśli $T(n)$ nie zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n, to możemy wybrać najmniejsze takie n, a to prowadzi do sprzeczności z (I1) (gdy $n = 1$) lub (I2) (gdy $n > 1$, bo wtedy $T(n-1) \Rightarrow T(n)$).

Można to przekuć w coś ogólniejszego. Porządek zadany relacją $<$ na zbiorze X nazywamy *dobrym*, jeśli każdy podzbiór $S \subseteq X$ ma element najmniejszy, czyli element $x \in S$ spełniający $x < y$ dla wszystkich innych $y \in S$. Powyższe rozumowanie daje wtedy:

Twierdzenie 2: zasada indukcji pozaskończonej. *Dany jest zbiór X z dobrym porządkiem $<$ oraz rodzina warunków $T(x)$ odpowiadających elementom X. Załóżmy, że:*

(IP1) *zachodzi warunek $T(x_0)$ odpowiadający najmniejszemu elementowi X;*
(IP2) *jeśli $T(y)$ zachodzi dla wszystkich $y < x$, to zachodzi również $T(x)$.*

Wtedy zachodzą warunki $T(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Na zbiorze par liczb naturalnych $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ można określić *porządek leksykograficzny*: umawiamy się, że $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$, gdy $a_1 < b_1$ lub też gdy $a_1 = b_1$ i $a_2 < b_2$. Polecam samodzielnie sprawdzić, że każdy podzbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ posiada element najmniejszy w sensie tego porządku.

Na marginesie można prześledzić przykład zbioru dobrze uporządkowanego. Niestety przykładem takim nie jest $\mathbb{R}$ ze standardową relacją porządku $<$, gdyż elementu najmniejszego nie ma choćby zbiór $(0, \infty)$. W pierwszej chwili można pomyśleć, że kandydatem na element najmniejszy jest tu zero, ale ono w ogóle nie jest elementem $(0, \infty)$.

Częściowym rozwiązaniem tego problemu jest twierdzenie Zermelo, według którego na $\mathbb{R}$ (jak i na każdym innym zbiorze) można wybrać *inny* porządek, który jest już dobry. Pozwala to stosować indukcję pozaskończoną na liczbach rzeczywistych, o czym można przeczytać w artykule Piotra Zakrzewskiego w Δ^4_{17}. A jeśli upieramy się przy standardowym porządku na $\mathbb{R}$? Okazuje się, że nawet wtedy sprawa nie jest całkowicie stracona.

Spójność jako zasada indukcji

Choć spójność jest własnością oznaczającą intuicyjnie „bycie w jednym kawałku”, to można ją przeformułować w sposób analogiczny do zasady indukcji. Pomysł ten nie jest nowy – wraz z zarysem historii i wieloma szczegółami można o nim przeczytać w *The Instructor's Guide to Real Induction* Pete'a Clarka (arxiv.org/abs/1208.0973).

Twierdzenie 3: spójność odcinka. *Dana jest rodzina warunków $T(x)$ odpowiadających $x \in [0, 1]$. Załóżmy, że:*

(S1) *zachodzi $T(0)$;*
(S2) *jeśli zachodzi $T(x)$, to zachodzi również $T(y)$ dla wszystkich $y \in [0, 1]$ z pewnego przedziału $(x - r, x + r)$ (r może zależeć od x);*
(S3) *jeśli $x_n \to x$ i zachodzą $T(x_n)$ dla wszystkich n, to zachodzi też $T(x)$.*

Wtedy zachodzą warunki $T(x)$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$.

Warto odnotować, że same „kroki do przodu” wyrażone przez (S2) nie wystarczą, potrzebny jest jeszcze domykający krok (S3). Otóż – jak łatwo się przekonać – rodzina warunków $T(x)$: $x < 1/2$ spełnia (S1) i (S2), a mimo to $T(1)$ nie zachodzi.

Mam nadzieję, że w powyższym twierdzeniu Czytelnik odnajduje ducha małych kroczków, który stanowi esencję indukcji matematycznej. Dobrze zilustruje to następujące zastosowanie:

Zadanie 2. (twierdzenie o wartości średniej). Jeśli $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, a ponadto $f(0) < 0$ i $f(1) > 0$, to dla pewnego $x \in [0, 1]$ zachodzi $f(x) = 0$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy przeciwnie, że takie x nie istnieje; za warunek $T(x)$ przyjmijmy wtedy nierówność $f(x) < 0$. Prawdziwość (S1) wynika wprost z założeń zadania. Z kolei (S2) wynika z ciągłości: jeśli $f(x) < 0$, to istnieje takie $r > 0$, że również $f(y) < 0$ dla $y \in (x - r, x + r)$. W przypadku (S3) zauważamy, że jeśli $f(x_n) < 0$ oraz $x_n \to x$, to $f(x) \leqslant 0$. Skoro jednak $f(x) = 0$ wykluczyliśmy, to $f(x) < 0$.

Ze spójności odcinka wynika teraz, że $f(x) < 0$ dla wszystkich $x \in [0, 1]$, co jednak stoi w sprzeczności z założeniem $f(1) > 0$. $\square$

Podobnie jak zasadę indukcji, tak i spójność odcinka można wyprowadzić z pewnej podstawowej własności liczb. W tym przypadku – z pewnika Dedekinda, który mówi o istnieniu kresów dowolnych zbiorów ograniczonych. Otóż jeśli $T(x)$ nie zachodzi dla pewnego $x \in [0, 1]$, to możemy rozpatrzyć kres dolny x_* wszystkich takich x. To jednak prowadzi do sprzeczności z (S2) (gdy zachodzi $T(x_*)$), (S1) (gdy $T(x_*)$ nie zachodzi i $x_* = 0$) lub (S3) (w pozostałych przypadkach).

Czytelnik znający pojęcie przestrzeni topologicznej (np. z artykułu w Δ^{10}_{22}) może użyć następującej ogólnej definicji:

Definicja. Przestrzeń topologiczną X nazywamy spójną, jeśli własności (S1)–(S3) poniżej implikują $T(x)$ dla wszystkich $x \in X$.
(S1) zachodzi $T(x_0)$ dla pewnego ustalonego $x_0 \in X$;
(S2) jeśli zachodzi $T(x)$, to również $T(y)$ dla wszystkich y z pewnego otwartego otoczenia x;
(S3) jeśli x znajduje się w domknięciu punktów spełniających T, to warunek $T(x)$ również zachodzi.
Oznaczając przez S zbiór punktów spełniających T, otrzymujemy inną, równoważną wersję: X jest spójna, jeśli jedynym niepustym zbiorem $S \subseteq X$ jednocześnie otwartym i domkniętym jest sam zbiór X.

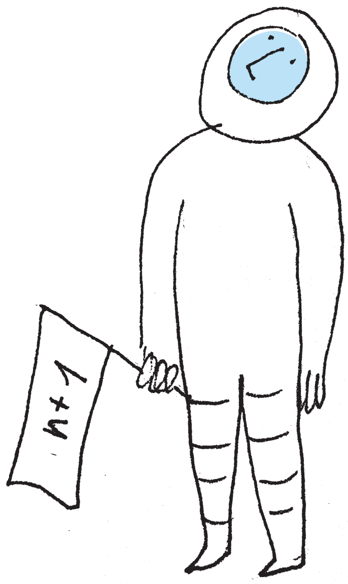
Wypada też wyjaśnić samo użycie słowa *spójność*. Zbiór liczb rzeczywistych S nazywamy spójnym, jeśli prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia 3, w którym odcinek $[0,1]$ zastąpimy zbiorem S, a 0 dowolnie wybranym „punktem startowym" $x_0 \in S$ (jak się okazuje, prawdziwość ta nie zależy od wyboru x_0). Podobną definicję można też sformułować w większej ogólności (zob. margines). Żeby zobaczyć, że to nazewnictwo jest trafne, warto prześledzić poniższe trzy przykłady.

Zadanie 3. Sprawdzić, że w myśl powyższej definicji:

– Spójny jest odcinek $(0,1)$ (można przyjąć np. $x_0 = 1/2$).
– Spójny jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.
– Nie jest spójny zbiór $[0,1] \cup [2,3]$.

Zwartość jako zasada indukcji

Zwartość to jeszcze jedna własność topologiczna. Trudno w dwóch słowach określić, co intuicyjnie oznacza – okazuje się, że zwarte podzbiory $\mathbb{R}$ to dokładnie zbiory domknięte i ograniczone, co nie brzmi porywająco. Tym bardziej skupmy się więc na indukcyjnym sformułowaniu zwartości, zaczerpniętym z tekstu Davida R. MacIvera *Topological compactness is an induction principle* (`drmaciver.com/2015/03/topological-compactness-is-an-induction-principle/`).



Twierdzenie 4: zwartość odcinka. *Dana jest rodzina warunków $P(U)$ odpowiadających podzbiorom $U \subseteq [0,1]$. Załóżmy, że:*

(Z1) *każdy punkt $x \in [0,1]$ posiada otoczenie $U = (x-r, x+r) \cap [0,1]$, dla którego zachodzi $P(U)$;*
(Z2) *jeśli zachodzą warunki $P(U_1), P(U_2)$ dla dwóch zbiorów $U_1, U_2 \subseteq [0,1]$, to również $P(U_1 \cup U_2)$.*

Wtedy zachodzi warunek $P([0,1])$.

Zwróćmy uwagę na nowość: własność P przysługuje nie punktom odcinka, ale jego podzbiorom. Inna jest też tu logika „małych kroków". Pożądaną przez nas własność sprawdzamy dla wybranych przez siebie małych zbiorów wokół punktów $x \in [0,1]$ (ich wielkość może zależeć od x), a twierdzenie 4 składa nam tę wiedzę o *lokalnym* zachowaniu w *globalną* konkluzję.

Na zakończenie proponuję kilka zadań. Zachęcam Czytelnika do pochylenia się nad nimi i samodzielnego przekonania się, jak ta ostatnia zasada indukcji działa w praktyce.

Zadanie 4. (tw. Weierstrassa). Każda funkcja ciągła $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona, to znaczy istnieje $M > 0$ spełniające $|f(x)| \leqslant M$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

Wskazówka. Przyjąć $P(U)$: funkcja f jest ograniczona w obcięciu do U.

Zadanie 5. (tw. Bolzano–Weierstrassa). Każdy ciąg (a_n) o wartościach w $[0,1]$ posiada podciąg zbieżny.

Wskazówka. Przypuścić przeciwnie, że (a_n) nie ma podciągu zbieżnego. Rozważyć własność $P(U)$: $a_n \in U$ dla skończenie wielu n.

Czytelnik-Topolog być może doceni ogólną definicję zwartości.

Definicja. Przestrzeń topologiczną X nazywamy zwartą, jeśli własności (Z1) i (Z2) poniżej implikują $P(X)$:
(Z1) każdy punkt $x \in X$ posiada otoczenie otwarte $U \ni x$, dla którego zachodzi $P(U)$;
(Z2) jeśli zachodzą warunki $P(U_1), P(U_2)$, to również $P(U_1 \cup U_2)$.

Większość źródeł wymaga od przestrzeni X również warunku Hausdorffa; jest on automatycznie spełniony w przypadku podzbiorów $\mathbb{R}$, jak też wszystkich przestrzeni metryzowalnych.

Zadanie 6. Zbiór liczb rzeczywistych S nazywamy zwartym, jeśli prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia 4 z S w miejsce $[0,1]$. Sprawdzić, że zbiory $(0,1)$ i $\mathbb{R}$ nie są zwarte, ale zbiór $[0,1] \cup [2,3]$ już owszem.

Wskazówka. Dla $(0,1)$ i $\mathbb{R}$: sprawdzić, że odpowiednik twierdzenia Weierstrassa nie jest prawdziwy. Dla $[0,1] \cup [2,3]$: skorzystać ze zwartości $[0,1]$ i $[2,3]$.

Zadanie 7. Udowodnić twierdzenie 4.

Wskazówka. Mając zadaną rodzinę $P(U)$ spełniającą (Z1) i (Z2), określić rodzinę $T(x)$: dla pewnego zbioru $U \supseteq [0,x]$ zachodzi warunek $P(U)$. Następnie sprawdzić (S1)–(S3) i skorzystać z twierdzenia 3.