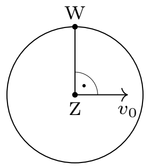
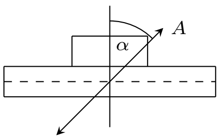
Klub 44 F

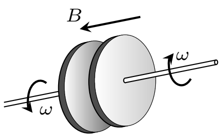
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2023



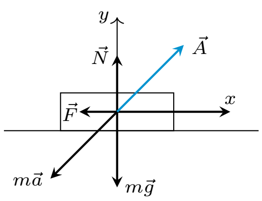
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 762, 763

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

762. Przekształcenie fotonu w parę elektron–pozyton w próżni jest niemożliwe, ze względu na zasadę zachowania pędu. Znaleźć minimalną energię, jaką powinien posiadać foton, aby mogła powstać para elektron–pozyton w pobliżu spoczywającego elektronu.

763. Na poziomej powierzchni lodu narysowany jest okrąg o promieniu $R = 10$ m. W chwili początkowej zając Z znajduje się w środku okręgu, a wilk W na okręgu, jak na rysunku 1. Zając porusza się po prostej z prędkością $v_0 = 2$ m/s. Wilk powinien poruszać się po okręgu tak, aby odległość między nim a zającem nie zmieniała się. Do jakiego punktu na okręgu uda mu się w ten sposób dotrzeć? Współczynnik tarcia wilka o lód: $\mu = 0{,}05$. Wilk nie podskakuje.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2023

Przypominamy treść zadań:

758. Pozioma podstawka, na której leży klocek, drga harmonicznie z częstotliwością $f = 10$ Hz w kierunku tworzącym kąt $\alpha = \pi/4$ z pionem (rys. 2). Współczynnik tarcia klocka o podstawkę: $\mu = 0{,}5$. Jakie warunki musi spełniać amplituda drgań, aby klocek zaczął pełznąć po podstawce, ale nie podskakiwał?

759. Dwie jednakowe okrągłe, płaskie, metalowe płytki umieszczone tak, jak pokazano na rysunku 3, obracają się z prędkością kątową ω w przeciwne strony w polu magnetycznym prostopadłym do powierzchni płytek. Indukcja pola magnetycznego wynosi B, a odległość między płytkami d. Osie płytek połączono przewodnikiem. Znaleźć napięcie między punktami płytek, które znajdują się naprzeciw siebie, a ich odległość od środka płytki wynosi r.

758. Załóżmy, że klocek porusza się razem z podstawką, zgodnie z prawem $\vec{r} = \vec{A}\sin\omega t$, gdzie $\omega = 2\pi f$, a wektor $\vec{A}$ tworzy z pionem kąt α (rys. 4). Na klocek działa siła ciężkości $m\vec{g}$, siła reakcji $\vec{N}$ ze strony podstawki i pozioma siła tarcia statycznego $\vec{F}$, której zwrot zależy od zwrotu wektora przyspieszenia $\vec{a}$. Równania ruchu klocka w kierunku poziomym i pionowym mają postać:

(1) $$F_x = ma_x = -m\frac{A}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t,$$

(2) $$N - mg = ma_y = -m\frac{A}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t.$$

Klocek nie podskakuje, gdy $N \geqslant 0$, czyli

(3) $$A \leqslant g\sqrt{2}/\omega^2.$$

Warunek na brak poślizgu $|F_x| \leqslant \mu N$, zgodnie z (1) i (2), możemy zapisać:

(4) $$\left|\frac{A}{\sqrt{2}}\omega^2\sin\omega t\right| \leqslant \mu\left(g - \frac{A\omega^2\sin\omega t}{\sqrt{2}}\right).$$

Prawa strona nierówności (3) dla $\sin\omega t < 0$ jest zawsze większa niż dla $\sin\omega t > 0$, dlatego minimalnej wartości amplitudy, przy której klocek zacznie się ślizgać, należy szukać dla $\sin\omega t > 0$. Znak równości odpowiada sytuacji, gdy tarcie statyczne osiąga wartość maksymalną i możemy to wykorzystać dla znalezienia chwili t_1, w której rozpocznie się poślizg:

(5) $$\sin\omega t_1 = \frac{\mu g\sqrt{2}}{(\mu+1)\,A\omega^2}.$$

Równanie (5) ma rozwiązanie, gdy jego prawa strona jest mniejsza od jedynki, czyli

(6) $$A > \frac{\mu g\sqrt{2}}{(\mu+1)\,\omega^2}.$$

Uwzględniając (3) i (6), otrzymujemy: 1,2 mm $< A <$ 3,5 mm.

759. Na elektron o ładunku $-e$, który znajduje się w odległości r od środka płytki, działają: siła Lorentza $F_L = evB = q\omega rB$ i siła $F_E = eE$ ze strony pola elektrycznego, wytworzona dzięki nierównomiernemu rozkładowi ładunku na płytce. Wypadkowa tych sił nadaje ładunkowi przyspieszenie dośrodkowe: $m\vec{a} = \vec{F}_L + \vec{F}_E$, $a = \omega r$. Płytki obracają się w przeciwne strony, więc siły Lorentza działające na ładunki znajdujące się w jednakowej odległości od środków dysków mają przeciwne zwroty:

$$eE + e\omega rB = m\omega^2 r \text{ dla prawego dysku,}$$

$$eE - e\omega rB = m\omega^2 r \text{ dla lewego dysku.}$$

E jest dodatnie, jeśli zwrot jest na zewnątrz płytki, zatem dla małych prędkości kątowych, gdy $m\omega r < erB$, siły elektryczne w płytkach mają zwroty przeciwne, w przeciwnym wypadku zgodne. Wartość bezwzględna E w obu przypadkach jest proporcjonalna do odległości r od środka płytki, a w środku płytki ma wartość zero.

Ponieważ osie płytek są połączone przewodnikiem i mają jednakowe potencjały, szukane napięcie między elementami płytek odległymi o r od środka wynosi $U = U_2 - U_1$, gdzie

$$U_{2,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{m\omega^2}{e} \pm \omega B\right)r^2.$$

Ostatecznie $U = \omega B r^2$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 750 ($WT = 3{,}14$), 751 ($WT = 2{,}63$), 752 ($WT = 2{,}03$), 753 ($WT = 2{,}73$), 754 ($WT = 3{,}51$), 755 ($WT = 2{,}2$) z numerów 1, 2, 3/2023

Tomasz Rudny	Poznań	43,41
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2 – 38,81
Jacek Konieczny	Poznań	36,51
Tomasz Wietecha	Tarnów	16 – 30,40
Konrad Kapcia	Poznań	2 – 22,55
Ryszard Baniewicz	Włocławek	1 – 21,54
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3 – 19,70

Po 751 zadaniach Paweł Perkowski po raz piąty przekroczył granicę **44** punktów.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 855 ($WT = 1{,}98$) i 856 ($WT = 2{,}20$) z numeru 2/2023

Norbert Porwol	Essen	43,61
Paweł Najman	Kraków	41,91
Radosław Kujawa	Wrocław	41,33
Marcin Kasperski	Warszawa	40,29
Adam Woryna	Ruda Śl.	38,27
Szymon Tur		35,35
Piotr Kumor	Olsztyn	35,26
Michał Adamaszek	Kopenhaga	34,81
Janusz Fiett	Warszawa	33,39
Paweł Kubit	Kraków	33,33
Marek Spychała	Warszawa	30,13

Zadania z matematyki nr 865, 866 *Redaguje Marcin E. KUCZMA*

865. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach A i C są proste (ale nie przy wierzchołkach B i D). Punkt M jest środkiem przekątnej AC. Punkt E jest symetryczny do B względem M. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach ABC i ADE są przystające.

866. Dane są dwie różne liczby pierwsze p, q takie, że $2^p - 1$ oraz $2^q - 1$ też są liczbami pierwszymi, a ponadto każda z liczb $2^{p-1} - 1$ oraz $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pq. Udowodnić, że jeżeli liczba całkowita dodatnia d jest dzielnikiem liczby $2^{pq} - 1$, to liczba $d - 1$ dzieli się przez pq.

Zadanie 866 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

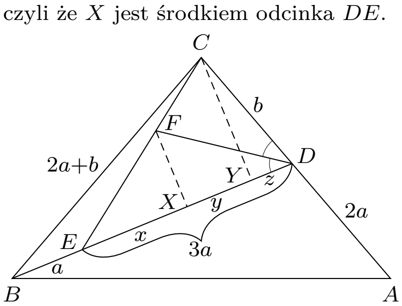
Rozwiązania zadań z numeru 5/2023

Przypominamy treść zadań:

861. Trójkąt ABC jest równoramienny: $AC = BC$. Punkt D leży na boku AC, przy czym $2\,AD = BD$. Punkt E leży na odcinku BD, przy czym $2\,BE = AD$. Wykazać, że $\sphericalangle CDE = 2\sphericalangle CED$.

862. Dany jest graf skierowany o skończenie wielu wierzchołkach (każde dwa różne wierzchołki łączy co najwyżej jedna krawędź zorientowana). Każda krawędź jest pokolorowana jednym z m kolorów; zaś z każdego wierzchołka wychodzi więcej niż m krawędzi. Udowodnić, że z każdego wierzchołka można poprowadzić nieskończenie wiele nieskończonych scieżek takich, że dla każdej liczby naturalnej k krawędzie przechodzone w k-tym kroku na wszystkich tych ścieżkach mają jednakowy kolor. (Nieskończona scieżka to nieskończony ciąg kolejno przyległych krawędzi – początkiem kolejnej jest koniec poprzedniej).

861. Niech $BE = a$, $CD = b$; więc $AD = 2a$, $BD = 4a$, $BC = AC = 2a + b$. Dwusieczna kąta CDE przecina odcinek CE w punkcie, który nazwiemy F. Rzuty punktów F i C na prostą BD oznaczmy odpowiednio X i Y. Zadanie sprowadza się do wykazania, że $\sphericalangle FDE = \sphericalangle FED$, czyli że $FD = FE$ – czyli że X jest środkiem odcinka DE.



Przyjmijmy dalsze oznaczenia długości odcinków: $EX = x$, $XY = y$ oraz $YD = z$, gdy (jak na rysunku) punkt Y leży na odcinku BC; natomiast jeśli Y leży na przedłużeniu tego odcinka (tak się dzieje, gdy kąt ADB jest ostry), przez z oznaczymy liczbę ujemną $z = -DY$. W każdym przypadku zachodzi równość

(1) $$x + y + z = 3a;$$

dalsze rachunki są niezależne od konfiguracji. Należy dowieść, że $EX = DX$, czyli że $x = y + z$.

Twierdzenie Pitagorasa w trójkątach CBY i CDY pociąga równość $CB^2 - BY^2 = CD^2 - DY^2$, którą przepisujemy jako

$$(2a + b)^2 - (4a - z)^2 = b^2 - z^2;$$

po rozwinięciu kwadratów i redukcji:

(2) $$2z = 3a - b.$$

Wstawiamy to do równości (1), pomnożonej stronami przez 2, i otrzymujemy

(3) $$2x + 2y = 3a + b.$$

W trójkącie CDE odcinek DF jest dwusieczną kąta CDE, a zatem $CF : FE = CD : DE$, czyli

(4) $$\frac{y}{x} = \frac{b}{3a}.$$

Z połączenia zależności (3) i (4) widać, że

(5) $$2x = 3a, \qquad 2y = b.$$

Teza $x = y + z$, do której wcześniej zostało sprowadzone zadanie, wynika natychmiast ze związków (2) i (5).

862. Przyjmijmy, że graf ma n wierzchołków. Wybierzmy dowolny wierzchołek $\mathbf{v}_0$. Ustalmy liczbę naturalną r i weźmy pod uwagę wszystkie możliwe ścieżki długości r wychodzące z tego wierzchołka. Ich liczba wynosi co najmniej $(m + 1)^r$, bo z każdego wierzchołka wychodzi co najmniej $m+1$ krawędzi. Na każdej z tych ścieżek widzimy pewną sekwencję kolorów. Liczba możliwych sekwencji jest równa m^r. Każda z tych ścieżek kończy się w jednym z n wierzchołków grafu. Niech więc r będzie taką liczbą, że $(m + 1)^r > nm^r$ (dla zadanych wartości m, n taka liczba r niewątpliwie istnieje). Wówczas pewne dwie ścieżki o identycznej sekwencji kolorów docierają do tego samego wierzchołka; nazwijmy go $\mathbf{v}_1$ (może być kilka wierzchołków o tej własności; wybieramy jeden z nich).

Oznaczmy te dwie ścieżki symbolami α, β (możemy przyjąć, że wierzchołki i krawędzie są zawczasu ponumerowane i ustalić dowolny algorytm, wybierający wierzchołek $\mathbf{v}_1$, ścieżkę α i ścieżkę β).

Powtarzamy schemat; rolę wierzchołka $\mathbf{v}_0$ przejmuje wierzchołek $\mathbf{v}_1$. Znajdujemy dwie różne ścieżki długości r, o identycznej sekwencji kolorów, docierające do wspólnego wierzchołka $\mathbf{v}_2$; znów jedną z nich oznaczamy symbolem α, drugą β (według przyjętego algorytmu). Iterując postępowanie (indukcja), dostajemy ciąg wierzchołków $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots$ W każdym z nich mamy do wyboru kontynuację typu α lub β; i przy każdej kontynuacji otrzymamy ścieżki (długości $r, 2r, 3r, \ldots$) o identycznej sekwencji kolorów. Możliwość wyboru na każdym kroku (α lub β) generuje nieprzeliczalnie wiele ścieżek (nieskończonej długości), o jakie chodzi.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.