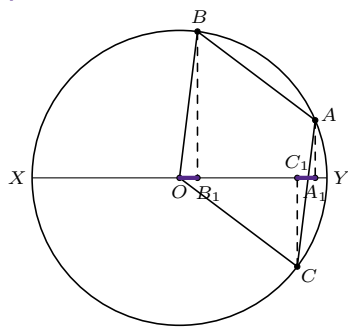




Rozwiązanie zadania M 1753.
Rozważmy konfigurację taką, jak na rysunku.



Czworokąt $ABOC$ jest rombem, więc rzuty prostokątne odcinków AC i BO na prostą XY są równe, czyli $OB_1 = A_1C_1$. Ponieważ $OX = OY$, dostajemy

$$\begin{aligned} XB_1 &= XO + OB_1 = \\ &= OY + A_1C_1 = OA_1 + C_1Y, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie.

Zbiór E ma $6m$ elementów, gdyż każdemu trójkątowi w grafie odpowiada $3! = 6$ elementów W^3 . Rzut prostokątny zbioru E na płaszczyznę OXY (tzn. zbiór E_{xy}) zawiera wyłącznie pary wierzchołków połączonych krawędzią. Ponieważ każda krawędź wyznacza dwa wierzchołki, więc liczba wierzchołków w zbiorze E_{xy} nie przekracza $2k$, gdzie k jest liczbą krawędzi. Podobnie jest w każdym z pozostałych rzutów E_{xz} oraz E_{yz} zbioru E . Zatem zgodnie z nierównością Loomisa–Whitneya $(6m)^2 \leq 2k \cdot 2k \cdot 2k$, skąd wynika teza. \square

Oszacowanie liczby trójkątów w grafie ma pewien związek z teorią baz danych w kontekście *zapytań trójkątnych* (*triangle queries*), które często pojawiają się w sytuacjach praktycznych. Ograniczenie z twierdzenia pomaga oszacować złożoność algorytmów, które realizują te zapytania. Więcej na ten temat można przeczytać na przykład w rozdziale 1.2 pracy Hunga Ngo *Worst-Case Optimal Join Algorithms: Techniques, Results, and Open Problems*, dostępnej w serwisie arxiv.org. A ponieważ trójkąty w grafach są takie przydatne, przedstawimy jeszcze jedno klasyczne twierdzenie, które jest z nimi związane.

Twierdzenie 3 (W. Mantel, 1906). *Jeśli graf nie zawiera trójkątów, to ma co najwyżej $\frac{n^2}{4}$ krawędzi.*

Dowód. Niech $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ będzie grafem o n wierzchołkach, niezawierającym trójkąta. Przez d_i oznaczmy liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka v_i . Niech A będzie największym w G zbiorem wierzchołków, w którym żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią. Zauważmy, że zbiór $B = G \setminus A$ zawiera przynajmniej jeden z końców każdej krawędzi, zatem $|E| \leq \sum_{v_i \in B} d_i$ (w sumie po prawej stronie liczone są wszystkie krawędzie, przy czym dwukrotnie liczone są te między dwoma wierzchołkami z B). Ponadto jeśli weźmiemy dowolny wierzchołek, to żaden z jego sąsiadów nie może być połączony (inaczej powstałby trójkąt), w związku z czym liczba tych sąsiadów nie może być większa od $|A|$ (z definicji zbioru A). Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy zatem

$$|E| \leq \sum_{v_i \in B} d_i \leq |B| \cdot |A| \leq \left(\frac{|A| + |B|}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

co kończy dowód i niniejszy artykuł. \square

Twierdzenie Tomaszewskiego

Aleksander PAWLEWICZ

W kwietniu 1986 roku na łamach czasopisma „The American Mathematical Monthly” Richard Guy zaprezentował pewną hipotezę, wskazując jako jej autora Bogusława Tomaszewskiego. Hipoteza brzmiała tak:

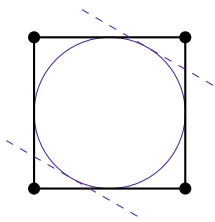
Hipoteza. Rozważmy n liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n spełniających równość $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Czy wśród 2^n wyrażeń postaci $|\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n|$, gdzie każda z liczb $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ jest równa $+1$ lub -1 , wyrażeń o wartości > 1 może być więcej niż tych o wartości ≤ 1 ?

Przez 34 lata problem pozostawał otwarty. Pomimo licznych prób nie był znany żaden dowód potwierdzający hipotezę ani ją obalający. Dopiero w 2020 roku na portalu arxiv.org pojawił się artykuł *Proof of Tomaszewski’s Conjecture on Randomly Signed Sums* zawierający negatywną odpowiedź na postawione wyżej pytanie. Autorami artykułu są Nathan Keller i Ohad Klein. Praca ta po pewnych modyfikacjach liczy 76 stron, a w skróconej wersji ukazała się w „Advances in Mathematics”. Już sama objętość świadczy o dużej trudności dowodu.

W niniejszym artykule zwięźle przedstawimy historię problemu, a także pewne wnioski wynikające z hipotezy, którą aktualnie możemy już nazywać twierdzeniem: spośród wyrażeń postaci $|\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n|$ co najmniej połowa musi być nie większa od 1. Sami autorzy dowodu preferują sformułowanie probabilistyczne:

Twierdzenie. Niech $X = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, gdzie a_i to liczby spełniające $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, zaś x_i są niezależnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości $+1$ i -1 z równym prawdopodobieństwem. Wówczas $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{2}$.





Niezależnie od wyboru kierunku stycznych co najmniej połowa wierzchołków leży między nimi

Te i wiele innych cennych informacji o Hipotezie i próbach jej dowodzenia można znaleźć we wspomnianym już artykule:

N. Keller, O. Klein, *Proof of Tomaszewski's Conjecture on Randomly Signed Sums*, Adv. Math. 407 (2022). Artykuł dostępny również pod adresem <https://arxiv.org/abs/2006.16834>

Oszacowanie obok warto porównać z centralnym twierdzeniem granicznym: według niego rozkład zmiennej losowej $\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}}$ zbiega przy $n \rightarrow \infty$ do rozkładu normalnego, w szczególności prawdopodobieństwo

$\mathbb{P}(|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n})$ zbiega do $\mathbb{P}(|N(0, 1)| \leq 1) \approx 0,68$.

Jest to lepszy wynik, ale prawdziwy jedynie w granicy. Dla ustalonego n prawdopodobieństwo może być istotnie mniejsze.

Istotnie, w opisanym modelu każdy z 2^n możliwych ciągów $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ jest równie prawdopodobny jako wynik losowania x_1, \dots, x_n . Prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$ opisuje więc proporcję liczby *dobrych* ciągów (czyli takich, dla których omawiane wyrażenie jest nie większe od 1) do liczby wszystkich ciągów.

To samo twierdzenie można równoważnie sformułować jeszcze inaczej: jeśli w n -wymiarową kostkę wpisano n -wymiarową kulę, a następnie wybrano dwie równoległe hiperpłaszczyzny styczne do kuli, to przynajmniej połowa wierzchołków kostki leży pomiędzy tymi hiperpłaszczyznami (lub na nich). Ilustrację dla $n = 2$ zamieszczamy obok.

Historia. Zanim uzyskano nierówność sformułowaną w powyższym twierdzeniu, przez kilkanaście lat otrzymywano stopniowo coraz lepsze oszacowania. Pierwszym znaczącym wynikiem na tym polu była nierówność $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{3}$ otrzymana w 2002 roku przez A. Ben-Tala, A. Nemirovskiego i C. Roosa. Kolejny rezultat uzyskał w 2012 roku I. Shnurnikov – udowodnił mianowicie nierówność $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq 0,36$. Pierwszymi, którzy przekroczyli barierę $3/8$, byli R. B. Boppana i R. Holzman. W 2017 roku wykazali oni, że wartość $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$ może być oszacowana z dołu przez **0,406**. Kolejne dwa ograniczenia dolne ukazały się w podobnym czasie. Najpierw R. B. Boppana i H. Hendriks wykazali, że $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq 0,428$, a następnie V. Dvořák, P. van Hintum i M. Tiba pokazali, że po prawej stronie powyższej nierówności można wstawić **0,46**. Dwa ostatnie wyniki zostały opublikowane w latach 2020 i 2021.

W czasie gdy dowodono coraz lepsze oszacowania dolne, omówione powyżej, pojawiały się także coraz lepsze wyniki dowodzące pożądanej nierówności $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{2}$ w szczególnych przypadkach. Najpierw w roku 1992 pojawił się dowód twierdzenia, gdy liczba zmiennych x_i i liczb a_i nie przekracza dziesięciu. Wynik ten zawdzięczamy R. Holzmanowi i D. J. Kleitmanowi. Innym kierunkiem dowodzenia hipotezy było wykazanie jej dla wszystkich a_i równych. Dokonał tego M. C. A. van Zuijlen w roku 2011. Kilka lat później, w roku 2018 T. Toufar udowodnił sformułowaną w twierdzeniu nierówność przy założeniu, że wszystkie poza jednym a_i są równe. Nieco innym kierunkiem uogólnień było wykazanie w roku 2015 przez V. K. Bentkusa i D. Dzindzalieta, że nierówność jest prawdziwa, gdy największa z liczb $|a_i|$ nie przekracza 0,16.

Wnioski płynące z twierdzenia. Aby zilustrować twierdzenie, omówimy teraz jego szczególny przypadek: pewną nierówność dwumianową. Przyjmijmy, że wszystkie współczynniki a_1, \dots, a_n są równe, czyli niech $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Na mocy twierdzenia Tomaszewskiego wiemy, że

$$\mathbb{P}(|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n}) \geq \frac{1}{2},$$

gdzie x_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbb{P}(x_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$.

Wróćmy do sformułowania deterministycznego. Powyższa nierówność oznacza, że spośród wszystkich 2^n wyborów wartości ± 1 w ciągu $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ mamy

$$|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n| \leq \sqrt{n}$$

dla co najmniej połowy z nich, a więc co najmniej 2^{n-1} . Odpowiedzmy teraz w inny sposób na pytanie o liczbę takich wyborów. Jeśli w wybranym ciągu jest k liczb $+1$ i $n - k$ liczb -1 , to suma $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ wynosi $k - (n - k)$, czyli $2k - n$. Warunek $|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n| \leq \sqrt{n}$ sprowadza się więc do

$$\frac{n - \sqrt{n}}{2} \leq k \leq \frac{n + \sqrt{n}}{2}.$$

Dla ustalonego k spełniającego te warunki możliwych ustawień ± 1 jest $\binom{n}{k}$, co pozwala przeformułować naszą nierówność w postaci:

$$\sum_{k=\lceil \frac{n-\sqrt{n}}{2} \rceil}^{\lfloor \frac{n+\sqrt{n}}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \geq 2^{n-1}.$$

Wniosek: około \sqrt{n} największych wyrazów ciągu o wyrazach $\binom{n}{k}$ daje w sumie więcej, niż pozostałe wyrazy tego ciągu.