

Nowe przygody papierowej tasiemki

Piotr PIKUL*

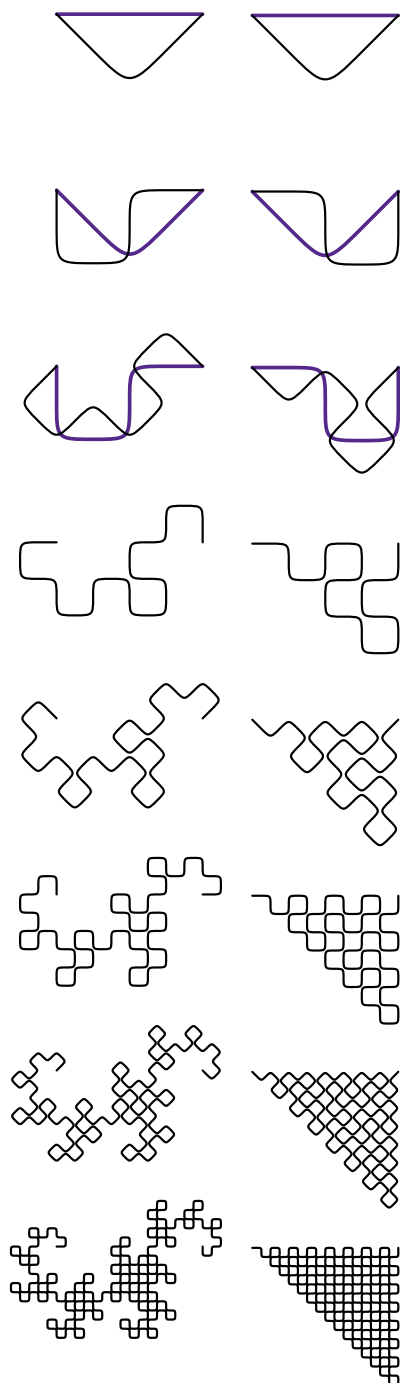
* Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński

Kiedy jeszcze niedawno uważałem, że dekada jest czymś bardzo podobnym do ery geologicznej, na łamach *Delty* ukazał się artykuł Tomasza Idziaszka *Fraktalny świat papierowej tasiemki* (Δ_{11}^7). Czytelnicy, w tym autor niniejszego artykułu, mogli się z niego dowiedzieć o smoczej krzywej, której kolejne przybliżenia konstruujemy z wielokrotnie złożonego na pół paska papieru, rozwiniętego tak, aby wszystkie zagięcia tworzyły kąt prosty. Fraktal otrzymany jako granica tych przybliżeń zwany jest *smokiem Heighwaya*. Od razu pojawiło się u mnie pytanie o efekty innych metod składania tytułowej tasiemki. Dobrze, że artykuł wspominał o algorytmicznym podejściu do generowania takich krzywych, bo inaczej trudno byłoby uzyskać (tak) ciekawe rezultaty. Na szczęście pierwszy przykład, o którym opowiem, jeszcze daje się łatwo wykonać, nawet jeśli nie mamy *czarnego pasa w origami*.

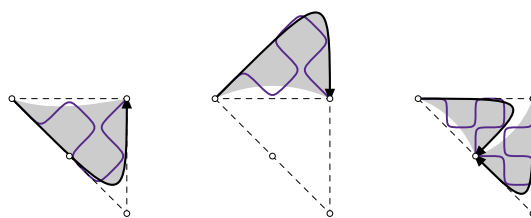
Jaka może być najprostsza modyfikacja konstrukcji Heighwaya? Możemy za każdym razem odwracać naszą składankę na drugą stronę. Nie jest oczywiste, że to cokolwiek zmienia, ale od tego są eksperymenty, aby się przekonać! Czytelnika, który w miejsce samodzielnej zabawy paskami papieru od razu zacznie studiować rysunki na marginesie, uprzedzamy, że co drugi rysunek jest odbity symetrycznie (względem osi poziomej), aby łatwiej było zauważyć relację pomiędzy kolejnymi generacjami. Ostatecznie, zamiast odwracać całą tasiemkę, możemy każde kolejne złożenie wykonywać w przeciwną stronę niż poprzednie (raz zaginając do góry, a raz do dołu). Rozpieszczony przez smoczą krzywą miłośnik „prawdziwych” fraktali będzie zapewne rozczarowany. Kolejne kroki konstrukcji przybliżają bowiem krzywą... wypełniającą trójkąt prostokątny równoramienny.

Należy w tym miejscu nadmienić, że po każdym kolejnym złożeniu trójkąt „wypełniany” przez krzywą będzie coraz mniejszy. Liczba odcinków wypełniających trójkąt rośnie proporcjonalnie do kwadratu liczby odcinków przypadającej na długość jego boku (czyli proporcjonalnie do pola powierzchni). Skracając „odcinek jednostkowy” dwukrotnie (dzieje się to po każdym złożeniu), czterokrotnie zwiększamy „zapotrzebowanie” na odcinki wypełniające trójkąt, jednocześnie zaśledwie podwajając ich liczbę. Wygodnie jest zatem myśleć, że za każdym razem długość krzywej rośnie $\sqrt{2}$ -krotnie. Przy okazji zauważymy, że przejście do kolejnego kroku można przedstawić jako zastąpienie każdego odcinka dotychczasowej łamanej przez dwa wzajemnie prostopadłe (tworzące ze swym „przodkiem” trójkąt prostokątny równoramienny). Ta konstrukcja pozwala uzasadnić, że krzywa nigdy nie przecina samej siebie (choć jeśli nie zaokrąglimy jej na wierzchołkach, będą to punkty odwiedzane dwukrotnie), ale po więcej szczegółów tego rozumowania odsyłam do tekstu wspomnianego na początku.

Spróbujmy odpowiedzieć sobie na pytanie, czy tak zadana krzywa naprawdę wypełnia trójkąt prostokątny równoramienny – kilka rysunków nie jest przecież dowodem! Rozważmy rozkładanie paska papieru. Ewidentnie obie połówki staną się przystającymi figurami. Co więcej, te figury to poprzednie generacje krzywej, choć odbite symetrycznie i pomniejszone. Stąd wniosek, że kolejny krok konstrukcji zakłada pomniejszenie krzywej, odbicie symetryczne (odwracamy tasiemkę) oraz umieszczenie jej dwóch kopii w określony sposób (prostopadle, ze wspólnym „końcem”). Innymi słowy, jest to system złożony z dwóch przekształceń afinicznych, który pozwala tworzyć kolejne generacje.

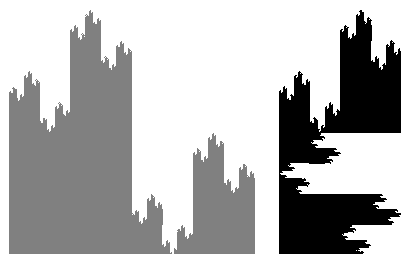


Początkowe generacje smoczej krzywej oraz jej „odwracanego” krewnego

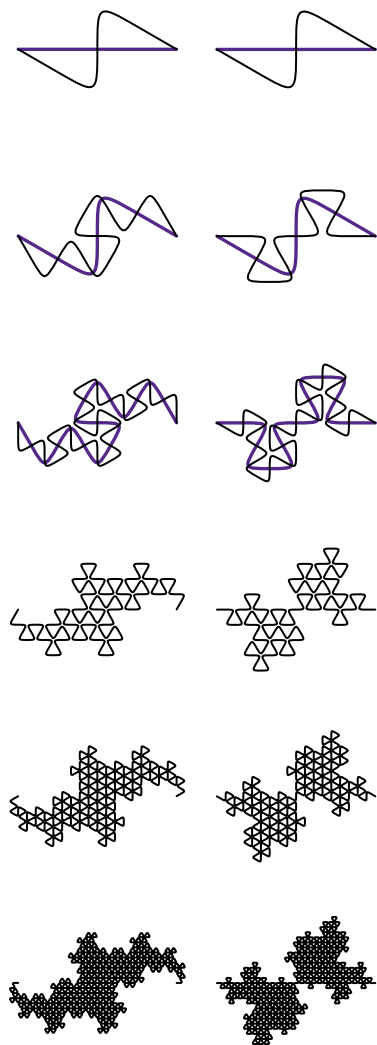


Oba rozważane przekształcenia są *zweźajające* (zmniejszają odległości między punktami $\sqrt{2}$ -krotnie). Można stąd wywnioskować, że *zweźajający* jest również

W Δ_{11}^7 znajduje się także artykuł Przemysława Kiciaka o systemach iterowanych przekształceń (IFS), gdzie Czytelnik znajdzie nieco więcej szczegółów.



Figury graniczne przy odwracaniu co drugi raz



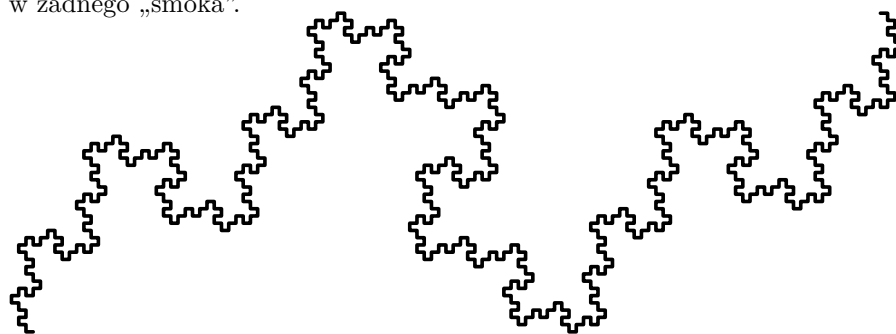
Początkowe generacje trójsmoka (terdragona) oraz wariantu z odwracaniem tasiemki (trójmuszki)

układ tych przekształceń, rozumiany jako przekształcenie określone na przestrzeni niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów płaszczyzny (należy oczywiście odpowiednio dobrać metrykę na tej przestrzeni; nie będziemy tu wchodzić w szczegóły). Dzięki twierdzeniu Banacha o punkcie stałym, startując od dowolnego początkowego zbioru (domkniętego i ograniczonego), będziemy zblizali się do jedynego punktu stałego naszego przekształcenia. Skoro kolejne generacje krzywej powstają w wyniku iterowania wspomnianego systemu, będą one zbiegały do tego konkretnego zbioru ograniczonego. Czytelnik zechce sprawdzić, że trójkąt prostokątny równoramienny faktycznie jest punktem stałym (sumą swoich obrazów w obu przekształceniach).

To może teraz spróbujemy odwracać naszą tasiemkę co drugi raz? Jest to sensowna konstrukcja i daje inny rezultat niż dwie poprzednie. Trudniej ją jednak opisać jako system przekształceń iterowanych, ponieważ przejścia do kolejnych generacji nie są takie same (jedno wiąże się z odbiciem symetrycznym, a drugie nie). Należałoby potraktować dwa kroki konstrukcji jako jeden, bardziej skomplikowany (złożony z czterech przekształceń). Tak naprawdę, w zależności od tego, czy zakończymy konstrukcję na kroku parzystym, czy nieparzystym, otrzymamy inny rezultat, ponieważ „dwukrok” pomiędzy generacjami parzystymi to nieco inne przekształcenie niż to startujące w kroku nieparzystym.

Czytelnik zapewne już się domyśla, że odwracając co trzeci raz, będziemy mieli do wyboru trzy figury graniczne. Czy muszą być one różne? Aż strach pomyśleć, co by było, gdybyśmy odwracali pasek w nieregularnych interwałach...

Do tej pory rozważaliśmy składanie tytułowej tasiemki na pół. Samo to (oraz odwracanie) daje nam już nieskończenie wiele możliwości, ale to nie powód, aby nie szukać dalej. Może spróbujemy składać na trzy? Jeśli będziemy każdorazowo związać krzywą w „minimalistyczną harmonijkę” (lub, jak kto woli, literę N), po rozłożeniu dostaniemy poskręcaną linię, która jednak nijak nie formuje się w żadnego „smoka”.



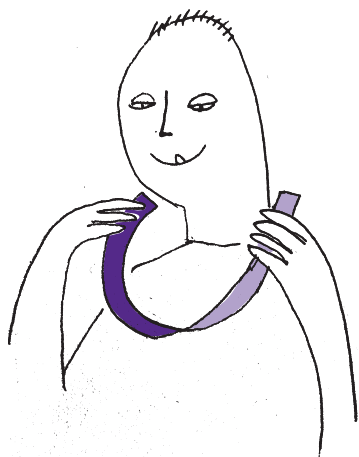
Jeśli jednak rozłożymy ją na siatce trójkątnej (czyli każde zagięcie będzie tworzyło kąt 60°), otrzymamy efekt bardziej zbliżony do smoczej krzywej, występujący w literaturze pod nazwą *terdragon* (trójsmok?). Podobnie jak klasyczny smok Heighwaya, trójsmok może wypełnić płaszczyznę, a do tego posiada środek symetrii. Tak jak w przypadku smoczej krzywej, przyglądając się, czym zastępujemy każdy odcinek podczas przechodzenia do kolejnej generacji, możemy wywnioskować brak samoprzecięć.

Jeśli konstrukcję trójsmoka zmodyfikujemy poprzez każdorazowe odwracanie naszego „origami”, otrzymamy zupełnie inny kształt, o równie fraktalnej naturze oraz intrygującej, wąskiej talii. Pomimo pozornego posiadania dwóch części, ta *muszka* (trójmuszka?) jest sumą trzech pomniejszonych kopii samej siebie, co raczej nie jest zaskakujące, biorąc pod uwagę metodę składania. Ponadto ma ona zdolność wypełniania płaszczyzny. Fakt ten możemy uzasadnić, zaczynając od pokrycia pewnej trójkątnej siatki (kraty?) początkowymi etapami konstrukcji (choćby krokami zerowymi – prostymi odcinkami) i zauważenia, że przy przejściu do kolejnej generacji nadal cała zagęszczona siatka będzie pokryta. Dla *zwykłego* trójsmoka taki argument również działa, a na kwadratowej siatce można w analogiczny sposób uzasadnić szczelność pokrycia płaszczyzny smokami Heighwaya.

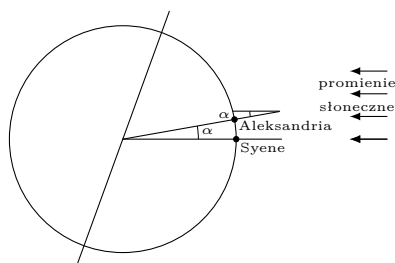
Opisana operacja na ciągach (złożenie w kształt B taśmki poskładanej uprzednio w kształt A) jest (co nie wydaje się oczywiste) łączna $((A * B) * C = A * (B * C))$. Ma to kluczowe znaczenie, także dla dowodu pewnych przytoczonych w artykule faktów.
Ciąg L również daje smoczą krzywą, choć odbitą symetrycznie.

Mówiąc o „równoważności”, mamy na myśli przybliżanie tej samej granicznej figury.

Brak stykających się zakrętów to po części wina siatki sześciokątnej.



* Wydział Matematyki i Fizyki
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska



Rys. 1
Przez moc zbioru skończonego rozumiemy liczbę jego elementów. Moc zbioru E będziemy oznaczać przez $|E|$.

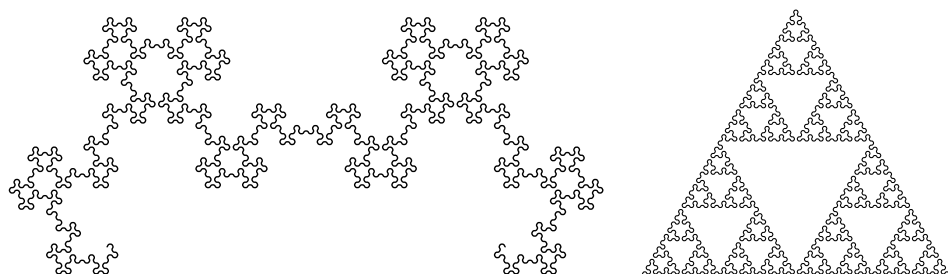
Jeszcze tylko kilka słów na temat kodowania opisanych fraktali. We *Fraktalnym świecie*... była mowa o przetwarzaniu ciągów (np. LLPLLPP) opisujących kolejne zakręty krzywej. Przechodząc do kolejnej iteracji, pomiędzy każde dwie litery dotychczasowego ciągu (a także na początku i na końcu) wstawiamy „wzór składania”, przy czym co drugą wstawkę „sprzęgamy”. Sprzężenie polega na odwróceniu kolejności zakrętów i zamianie ich na przeciwne (np. $\overline{PPLP} = LPLL$). Odwracanie taśmki na drugą stronę realizujemy poprzez zamianę wszystkich liter na przeciwne (tj. $P \leftrightarrow L$), bez odwracania kolejności. Dla *trójmuszki* pierwsze trzy ciągi prezentują się następująco (akurat $\overline{PL} = PL$):

$$PL \quad PL \ L \ PL \ P \ PL \quad PL \ L \ PL \ P \ PL \ P \ PL \ L \ PL \ P \ PL \ L \ PL \ L \ PL \ P \ PL$$

Warto tu wspomnieć o możliwości opisywania tej samej konstrukcji za pomocą różnych podstawowych ciągów zagięć. Na przykład klasyczną smoczą krzywą generujemy za pomocą ciągu P, ale moglibyśmy użyć PPL. Jeśli będziemy stosować odwracanie taśmki (po każdym złożeniu), to przedstawione sposoby składania przestaną być „równoważne”. „Metoda P” zaprowadzi nas do trójkąta, a „metoda PPL” z odwracaniem za każdym razem okazuje się innym sposobem opisu „metody P” z odwracaniem co drugi raz.

Na zakończenie jeszcze jeden przykład: składanie PP, czyli na trzy części, ale *do środka*, zamiast w trójsmoczą *harmonijkę*. W trzecim kroku konstrukcji ciąg zakrętów zawiera już fragment PPPP, czyli zakręcając o 90° , otrzymamy samoprzecięcie (z nałożeniem na siebie całych odcinków krzywej). Warto zatem rozważyć jakiś rozarty kąt składania. Została nam jeszcze jedna elegancka siatka na płaszczyźnie – sześciokątna. Jeśli damy jej szansę, zaginając naszą krzywą pod kątem 120° , otrzymamy intrygujący *fraktalny* wzorek, który nie tylko nie ma samoprzecięć, ale nawet nie ma stykających się wierzchołków! Nie tworzy też jednak wypelnionej figury.

To teraz jeszcze, z przyzwyczajenia, zmodyfikujmy konstrukcję poprzez każdorazowe odwracanie. Wygląda znajomo? Zaiste fraktalny jest świat papierowej taśmki!



Co kodują cienie?

Jarosław GÓRNICKI*

Spektakularne wykorzystanie cienia pokazał w Starożytności Eratostenes, szacując około 240 r. p.n.e. wielkość Ziemi. Prześledźmy jego rozumowanie.

W dniu przesilenia letniego w Syene (dzisiejszy Assuan) stojący prosto drąg nie rzuca cienia w południe. W tym samym momencie drąg w Aleksandrii rzuca cień, który odpowiada kątowi $\alpha = 7\frac{1}{5}^\circ (= \frac{1}{50} \cdot 360^\circ)$, jak na rysunku 1.

Eratostenes przyjął, że Aleksandria i Syene leżą na tym samym południku (w rzeczywistości Syene leży o 3° na wschód od Aleksandrii) i odległość między nimi jest równa 5000 stadiów (1 stadion ≈ 160 m). Daje to długość południkowego obwodu Ziemi równą 250 000 stadiów, czyli około 40 000 km. Całkiem niezłe!

Pozostając w cieniu geometrii, rozważmy teraz następujący problem. Załóżmy, że $E \subset \mathbb{R}^3$ jest skończonym zbiorem punktów (ogólnie, zbiorem ograniczonym i domkniętym), dla którego znamy jego rzuty prostokątne E_{xy}, E_{xz}, E_{yz} na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny. Czy można oszacować moc (objętość) zbioru E , znając jedynie moc (pole) jego rzutów? Pozytywną odpowiedź na to pytanie daje nierówność Loomisa–Whitneya, której najprostszą wersję prezentujemy poniżej: