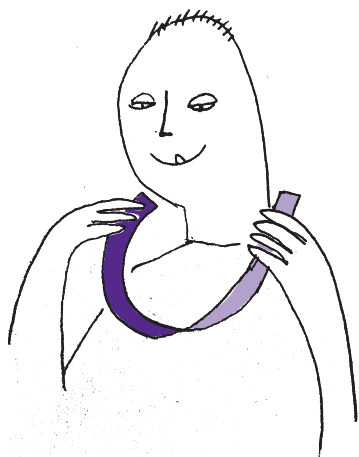


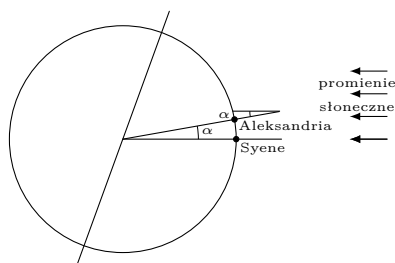
Opisana operacja na ciągach (złożenie w kształt B taśmki poskładanej uprzednio w kształt A) jest (co nie wydaje się oczywiste) łączna  $((A * B) * C = A * (B * C))$ . Ma to kluczowe znaczenie, także dla dowodu pewnych przytoczonych w artykule faktów.  
Ciąg L również daje smoczą krzywą, choć odbitą symetrycznie.

Mówiąc o „równoważności”, mamy na myśli przybliżanie tej samej granicznej figury.

Brak stykających się zakrętów to po części wina siatki sześciokątnej.



\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska



Rys. 1  
Przez moc zbioru skończonego rozumiemy liczbę jego elementów. Moc zbioru  $E$  będziemy oznaczać przez  $|E|$ .

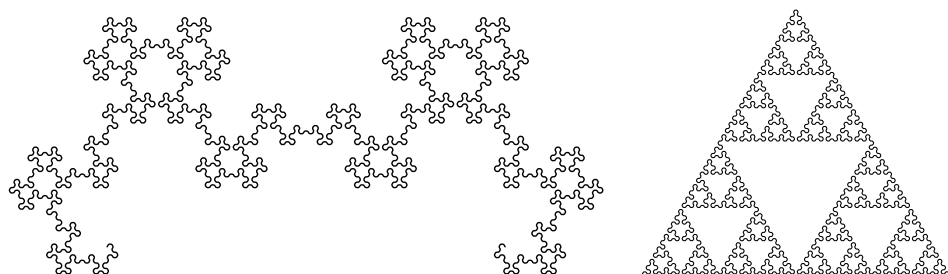
Jeszcze tylko kilka słów na temat kodowania opisanych fraktali. We *Fraktalnym świecie*... była mowa o przetwarzaniu ciągów (np. LLPLLPP) opisujących kolejne zakręty krzywej. Przechodząc do kolejnej iteracji, pomiędzy każde dwie litery dotychczasowego ciągu (a także na początku i na końcu) wstawiamy „wzór składania”, przy czym co drugą wstawkę „sprzęgamy”. Sprzężenie polega na odwróceniu kolejności zakrętów i zamianie ich na przeciwne (np.  $\overline{PPLP} = LPLL$ ). Odwracanie taśmki na drugą stronę realizujemy poprzez zamianę wszystkich liter na przeciwne (tj.  $P \leftrightarrow L$ ), bez odwracania kolejności. Dla *trójmuszki* pierwsze trzy ciągi prezentują się następująco (akurat  $\overline{PL} = PL$ ):

$$PL \quad PL \ L \ PL \ P \ PL \quad PL \ L \ PL \ P \ PL \ P \ PL \ L \ PL \ P \ PL \ L \ PL \ L \ PL \ P \ PL$$

Warto tu wspomnieć o możliwości opisywania tej samej konstrukcji za pomocą różnych podstawowych ciągów zagięć. Na przykład klasyczną smoczą krzywą generujemy za pomocą ciągu P, ale moglibyśmy użyć PPL. Jeśli będziemy stosować odwracanie taśmki (po każdym złożeniu), to przedstawione sposoby składania przestaną być „równoważne”. „Metoda P” zaprowadzi nas do trójkąta, a „metoda PPL” z odwracaniem za każdym razem okazuje się innym sposobem opisu „metody P” z odwracaniem co drugi raz.

Na zakończenie jeszcze jeden przykład: składanie PP, czyli na trzy części, ale *do środka*, zamiast w trójsmoczą *harmonijkę*. W trzecim kroku konstrukcji ciąg zakrętów zawiera już fragment PPPP, czyli zakręcając o  $90^\circ$ , otrzymamy samoprzecięcie (z nałożeniem na siebie całych odcinków krzywej). Warto zatem rozważyć jakiś rozarty kąt składania. Została nam jeszcze jedna elegancka siatka na płaszczyźnie – sześciokątna. Jeśli damy jej szansę, zaginając naszą krzywą pod kątem  $120^\circ$ , otrzymamy intrygujący *fraktalny* wzorek, który nie tylko nie ma samoprzecięć, ale nawet nie ma stykających się wierzchołków! Nie tworzy też jednak wypelnionej figury.

To teraz jeszcze, z przyzwyczajenia, zmodyfikujmy konstrukcję poprzez każdorazowe odwracanie. Wygląda znajomo? Zaiste fraktalny jest świat papierowej taśmki!



## Co kodują cienie?

Jarosław GÓRNICKI\*

Spektakularne wykorzystanie cienia pokazał w Starożytności Eratostenes, szacując około 240 r. p.n.e. wielkość Ziemi. Prześledźmy jego rozumowanie.

W dniu przesilenia letniego w Syene (dzisiejszy Assuan) stojący prosto drąg nie rzuca cienia w południe. W tym samym momencie drąg w Aleksandrii rzuca cień, który odpowiada kątowi  $\alpha = 7\frac{1}{5}^\circ (= \frac{1}{50} \cdot 360^\circ)$ , jak na rysunku 1.

Eratostenes przyjął, że Aleksandria i Syene leżą na tym samym południku (w rzeczywistości Syene leży o  $3^\circ$  na wschód od Aleksandrii) i odległość między nimi jest równa 5000 stadiów (1 stadion  $\approx 160$  m). Daje to długość południkowego obwodu Ziemi równą 250 000 stadiów, czyli około 40 000 km. Całkiem niezłe!

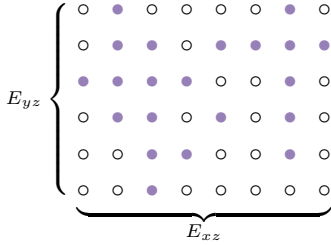
Pozostając w cieniu geometrii, rozważmy teraz następujący problem. Załóżmy, że  $E \subset \mathbb{R}^3$  jest skończonym zbiorem punktów (ogólnie, zbiorem ograniczonym i domkniętym), dla którego znamy jego rzuty prostokątne  $E_{xy}, E_{xz}, E_{yz}$  na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny. Czy można oszacować moc (objętość) zbioru  $E$ , znając jedynie moc (pole) jego rzutów? Pozytywną odpowiedź na to pytanie daje nierówność Loomisa–Whitneya, której najprostszą wersję prezentujemy poniżej:

**Twierdzenie 1** (nierówność Loomisa–Whitneya, 1949). *Dla dowolnego skończonego zbioru punktów  $E \subset \mathbb{R}^3$*

$$|E| \leq \sqrt{|E_{xy}| \cdot |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|},$$

gdzie  $E_{xy}$ ,  $E_{xz}$ ,  $E_{yz}$  to rzuty prostokątne zbioru  $E$  na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny.

*Dowód.* Poprowadzimy rozumowanie indukcyjne ze względu na liczbę różnych współrzędnych  $z$ -owych w zbiorze  $E$ .



Rys. 2. Punkty zbioru  $E$  oznaczono kolorem. Nierówność  $|E| \leq |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|$  jest oczywista i oznacza jedynie, że w zbiorze  $E$  jest nie więcej punktów niż w opisanym na nim prostokącie

Załóżmy najpierw, że wszystkie punkty zbioru  $E$  leżą na jednej płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny  $OXY$ . W tym przypadku  $|E| = |E_{xy}|$  i dla punktów leżących na wyróżnionej płaszczyźnie zachodzi  $|E| \leq |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|$  (rys. 2), więc nierówność będąca tezą twierdzenia jest prawdziwa.

Załóżmy, że nierówność jest prawdziwa dla  $k \geq 1$  (lub mniej) różnych współrzędnych  $z$ -owych w zbiorze  $E$ . Rozważmy przypadek, gdy tych współrzędnych jest  $k + 1$ . Niech  $\pi$  będzie płaszczyzną równoległą do płaszczyzny  $OXY$ , która dzieli zbiór  $E$  na dwa niepuste zbiory  $F$  i  $G$  i nie zawiera punktów zbioru  $E$ . Wtedy

$$|E| = |F| + |G|, \quad |E_{xz}| = |F_{xz}| + |G_{xz}|, \quad |E_{yz}| = |F_{yz}| + |G_{yz}|,$$

i oczywiście

$$|F_{xy}| \leq |E_{xy}| \quad \text{i} \quad |G_{xy}| \leq |E_{xy}|.$$

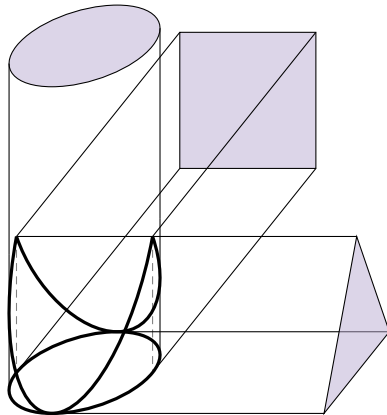
Zauważmy jeszcze, że dla dowolnych liczb  $a, b, c, d \geq 0$  prawdziwa jest nierówność  $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}$ , co łatwo sprawdzamy przez podniesienie obu stron nierówności do kwadratu. Korzystając z założenia indukcyjnego i przedstawionych zależności, dostajemy:

$$\begin{aligned} |E| = |F| + |G| &\leq \sqrt{|F_{xy}| \cdot |F_{xz}| \cdot |F_{yz}|} + \sqrt{|G_{xy}| \cdot |G_{xz}| \cdot |G_{yz}|} \leq \\ &\leq \sqrt{|E_{xy}|} \cdot \left( \sqrt{|F_{xz}| \cdot |F_{yz}|} + \sqrt{|G_{xz}| \cdot |G_{yz}|} \right) \leq \\ &\leq \sqrt{|E_{xy}|} \cdot \left( \sqrt{|F_{xz}| + |G_{xz}|} \cdot \sqrt{|F_{yz}| + |G_{yz}|} \right) = \\ &= \sqrt{|E_{xy}| \cdot |E_{xz}| \cdot |E_{yz}|}. \end{aligned}$$

Odwołanie do twierdzenia o indukcji matematycznej kończy uzasadnienie.  $\square$

W ogólności nierówność Loomisa–Whitneya pozwala na przykład stwierdzić, że:

*Objętość bryły trójwymiarowej nie jest większa od pierwiastka kwadratowego z iloczynu pól rzutów prostokątnych tej bryły na trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny.*



Rys. 3

Na przykład łatwiej oszacować objętość bryły, której trzy rzuty prostokątne dają cienie w kształcie koła, kwadratu i trójkąta równoramiennego, niż ją sobie wyobrazić (rys. 3). Jeśli bok kwadratu ma mieć długość 1, to prawa strona nierówności Loomisa–Whitneya jest w tym przypadku równa  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0,886$ . A jaka jest objętość tej bryły? Choć nierówność Loomisa–Whitneya ma charakter geometryczno-analityczny, to jej rozmaite warianty (uogólnienia) pojawiają się m.in. w analizie funkcjonalnej, probabilistyce, algebrze, teorii informacji.

Pokażemy teraz takie nieoczekiwane zastosowanie w teorii grafów.

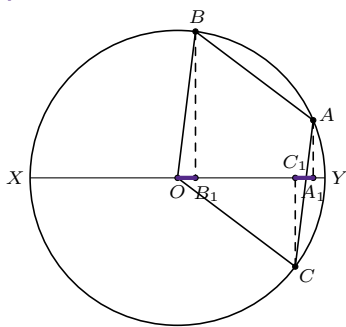
*Grafem* na płaszczyźnie nazwiemy skończony zbiór punktów (wierzchołków) i krawędzi łączących niektóre z nich. Wykluczamy występowanie pętli, czyli krawędzi o tym samym początku i końcu, oraz krawędzi wielokrotnie łączących tę samą parę wierzchołków. Przez *trójkąt w grafie* rozumiemy zbiór trzech wierzchołków połączonych krawędziami.

**Twierdzenie 2.** *Jeśli graf zawiera  $k$  krawędzi, to ma co najwyżej  $\frac{\sqrt{2k^3}}{3}$  trójkątów.*

*Dowód.* Niech  $W$  będzie zbiorem wierzchołków grafu. Oznaczmy przez  $m$  liczbę występujących w nim trójkątów. Zbiór  $W^3 \subset \mathbb{R}^3$  jest zbiorem uporządkowanym trójek wierzchołków. Niech  $E \subset W^3$  będzie zbiorem wszystkich trójek wierzchołków, które tworzą w rozważanym grafie trójkąt.



**Rozwiązanie zadania M 1753.**  
Rozważmy konfigurację taką, jak na rysunku.



Czworokąt  $ABOC$  jest rombem, więc rzuty prostokątne odcinków  $AC$  i  $BO$  na prostą  $XY$  są równe, czyli  $OB_1 = A_1C_1$ . Ponieważ  $OX = OY$ , dostajemy

$$\begin{aligned} XB_1 &= XO + OB_1 = \\ &= OY + A_1C_1 = OA_1 + C_1Y, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie.

Zbiór  $E$  ma  $6m$  elementów, gdyż każdemu trójkątowi w grafie odpowiada  $3! = 6$  elementów  $W^3$ . Rzut prostokątny zbioru  $E$  na płaszczyznę  $OXY$  (tzn. zbiór  $E_{xy}$ ) zawiera wyłącznie pary wierzchołków połączonych krawędzią. Ponieważ każda krawędź wyznacza dwa wierzchołki, więc liczba wierzchołków w zbiorze  $E_{xy}$  nie przekracza  $2k$ , gdzie  $k$  jest liczbą krawędzi. Podobnie jest w każdym z pozostałych rzutów  $E_{xz}$  oraz  $E_{yz}$  zbioru  $E$ . Zatem zgodnie z nierównością Loomisa–Whitneya  $(6m)^2 \leq 2k \cdot 2k \cdot 2k$ , skąd wynika teza.  $\square$

Oszacowanie liczby trójkątów w grafie ma pewien związek z teorią baz danych w kontekście *zapytań trójkątnych* (*triangle queries*), które często pojawiają się w sytuacjach praktycznych. Ograniczenie z twierdzenia pomaga oszacować złożoność algorytmów, które realizują te zapytania. Więcej na ten temat można przeczytać na przykład w rozdziale 1.2 pracy Hunga Ngo *Worst-Case Optimal Join Algorithms: Techniques, Results, and Open Problems*, dostępnej w serwisie [arxiv.org](https://arxiv.org). A ponieważ trójkąty w grafach są takie przydatne, przedstawimy jeszcze jedno klasyczne twierdzenie, które jest z nimi związane.

**Twierdzenie 3** (W. Mantel, 1906). *Jeśli graf nie zawiera trójkątów, to ma co najwyżej  $\frac{n^2}{4}$  krawędzi.*

*Dowód.* Niech  $G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  będzie grafem o  $n$  wierzchołkach, niezawierającym trójkąta. Przez  $d_i$  oznaczmy liczbę krawędzi wychodzących z wierzchołka  $v_i$ . Niech  $A$  będzie największym w  $G$  zbiorem wierzchołków, w którym żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią. Zauważmy, że zbiór  $B = G \setminus A$  zawiera przynajmniej jeden z końców każdej krawędzi, zatem  $|E| \leq \sum_{v_i \in B} d_i$  (w sumie po prawej stronie liczone są wszystkie krawędzie, przy czym dwukrotnie liczone są te między dwoma wierzchołkami z  $B$ ). Ponadto jeśli weźmiemy dowolny wierzchołek, to żaden z jego sąsiadów nie może być połączony (inaczej powstałby trójkąt), w związku z czym liczba tych sąsiadów nie może być większa od  $|A|$  (z definicji zbioru  $A$ ). Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną, otrzymujemy zatem

$$|E| \leq \sum_{v_i \in B} d_i \leq |B| \cdot |A| \leq \left( \frac{|A| + |B|}{2} \right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

co kończy dowód i niniejszy artykuł.  $\square$

## Twierdzenie Tomaszewskiego

Aleksander PAWLEWICZ

W kwietniu 1986 roku na łamach czasopisma „The American Mathematical Monthly” Richard Guy zaprezentował pewną hipotezę, wskazując jako jej autora Bogusława Tomaszewskiego. Hipoteza brzmiała tak:

**Hipoteza.** Rozważmy  $n$  liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  spełniających równość  $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$ . Czy wśród  $2^n$  wyrażeń postaci  $|\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n|$ , gdzie każda z liczb  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  jest równa  $+1$  lub  $-1$ , wyrażeń o wartości  $> 1$  może być więcej niż tych o wartości  $\leq 1$ ?

Przez 34 lata problem pozostawał otwarty. Pomimo licznych prób nie był znany żaden dowód potwierdzający hipotezę ani ją obalający. Dopiero w 2020 roku na portalu arxiv.org pojawił się artykuł *Proof of Tomaszewski’s Conjecture on Randomly Signed Sums* zawierający negatywną odpowiedź na postawione wyżej pytanie. Autorami artykułu są Nathan Keller i Ohad Klein. Praca ta po pewnych modyfikacjach liczy 76 stron, a w skróconej wersji ukazała się w „Advances in Mathematics”. Już sama objętość świadczy o dużej trudności dowodu.

W niniejszym artykule zwięźle przedstawimy historię problemu, a także pewne wnioski wynikające z hipotezy, którą aktualnie możemy już nazywać twierdzeniem: spośród wyrażeń postaci  $|\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n|$  co najmniej połowa musi być nie większa od 1. Sami autorzy dowodu preferują sformułowanie probabilistyczne:

**Twierdzenie.** Niech  $X = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ , gdzie  $a_i$  to liczby spełniające  $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ , zaś  $x_i$  są niezależnymi zmiennymi losowymi przyjmującymi wartości  $+1$  i  $-1$  z równym prawdopodobieństwem. Wówczas  $\mathbb{P}(|X| \leq 1) \geq \frac{1}{2}$ .

