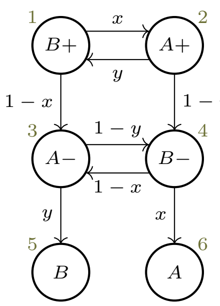
Łańcuchy Markowa – część 1

Bartłomiej BZDĘGA
Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Rozważmy następujące zadanie:

Dwóch zawodników – A i B – gra w szachy, przy czym A rozpoczyna. Każdy ruch może być dobry lub słaby. Wygrywa ten, kto jako pierwszy odpowie dobrym ruchem na słaby ruch przeciwnika. Zawodnik A wykonuje dobry ruch z prawdopodobieństwem x, a słaby z prawdopodobieństwem $1-x$. Analogicznie dla zawodnika B z wartościami y i $1-y$. Zakładamy, że $0<x<1$ i $0<y<1$. Dla jakich x i y zwycięstwa A i B są równo prawdopodobne?



Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę, że póki nikt nie wygrał, sytuacja w rozgrywce zależy tylko od ostatniego ruchu. Są cztery możliwości: po dobrym/słabym ruchu zawodnika A/B. Oznaczmy je przez $A+$, $A-$, $B+$, $B-$. Moment, w którym zawodnik A rozpoczyna, możemy rozważyć oddzielnie, ale nie ma takiej konieczności, bo jest on równoważny sytuacji $B+$. Możemy więc przyjąć $B+$ jako punkt wyjścia. Do tego dołóżmy jeszcze: A (A wygrał) i B (B wygrał). Na rysunku pokazano wszystkie sześć sytuacji, przyporządkowano im liczby od 1 do 6 oraz połączono je strzałkami opisującymi prawdopodobieństwa przejść.

Taki obiekt nazywamy skończonym *łańcuchem Markowa.* Jest on opisany przez pewien zbiór stanów $S_1, S_2, \ldots, S_n$ oraz prawdopodobieństwa $p_{i,j}$ przejścia w jednym kroku ze stanu S_i do stanu S_j dla wszystkich $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Oznacza to, że będąc w stanie S_i łańcuch z prawdopodobieństwem $p_{i,1}$ przejdzie do stanu S_1, z prawdopodobieństwem $p_{i,2}$ do stanu S_2 i tak dalej. Dla każdego i zachowana jest równość $p_{i,1}+p_{i,2}+\ldots+p_{i,n}=1$. Stany S_i, z których nie można wyjść ($p_{i,i}=1$), nazywamy *pochłaniającymi.* Interesuje nas prawdopodobieństwo zwycięstwa zawodnika A, czyli że proces zakończy się w stanie S_6, *pod warunkiem*, że rozpoczął się w S_1. Na ten problem trzeba spojrzeć ogólniej – niech q_i oznacza prawdopodobieństwo, że proces zakończy się w stanie S_6, pod warunkiem, że rozpoczął się w stanie S_i. Zwróćmy przy tym uwagę, że $q_6=1$ i $q_5=0$. Ze stanu S_1 można przejść do S_2 (z prawdopodobieństwem x) lub S_3 (z prawdopodobieństwem $1-x$). Wynika z tego, że $q_1 = xq_2 + (1-x)q_3$. Analogicznie otrzymujemy równości:

$$q_2 = yq_1 + (1-y)q_4, \quad q_3 = (1-y)q_4, \quad q_4 = (1-x)q_3 + x.$$

Po rozwiązaniu układu czterech równań z niewiadomymi q_1, q_2, q_3, q_4 otrzymamy:

$$\tfrac{1}{2} = q_1 = \tfrac{x(1-y)}{(1-xy)(x+y-xy)} \iff x-y = xy(1-x)(1-y),$$

więc dla x i y spełniających ostatnią równość obaj gracze mają jednakową szansę na zwycięstwo. Zauważmy, że w szczególności musi zachodzić $x>y$, gdyż prawa strona ostatniej równości jest dodatnia.

Zadania

1. Kotek wędruje między domem, przedszkolem, ogrodem, polem i lasem. Zaczyna w ogrodzie – tam zawsze wybiera jedno z pozostałych czterech miejsc. W domu zawsze się bawi, a następnie idzie na pole lub do ogrodu. Po spacerze w lesie kot zawsze idzie albo do ogrodu, albo do przedszkola. Jeśli kot trafi do przedszkola, już stamtąd nie wychodzi (ach, te dzieci…). Zaś na polu kot łowi mysz i kończy wędrówkę. Obliczyć prawdopodobieństwo zakończenia wędrówki w polu. (Zakładamy, że wybory kota są losowe i zawsze jednakowo prawdopodobne).
2. Student chce kupić swój ulubiony napój energetyczny, który kosztuje 5 złotych. Niestety, student ma tylko 2 złote. Postanawia w takim razie pójść do kasyna, w którym za postawioną złotówkę z prawdopodobieństwem p można wygrać 3 złote albo stracić postawioną złotówkę z prawdopodobieństwem $1-p$. Student przestaje grać, gdy uzyska kwotę pozwalającą kupić napój albo gdy zostanie bez pieniędzy. W zależności od p wyznaczyć szansę na to, że student osiągnie swój cel.
Uwaga. Autor kącika zdecydowanie nie promuje napojów energetycznych ani tym bardziej hazardu.
3. Jaś i Małgosia rzucają uczciwą monetą. Jeśli w trzech kolejnych rzutach pojawi się konfiguracja ORR (O oznacza orła, a R reszkę), gra kończy się wygraną Jasia, a jeśli OOR – wygrana Małgosi. Wyznacz prawdopodobieństwo wygranej Jasia.
4. Siedmioro dzieci stoi w kręgu i bawi się piłką. Każde z nich, mając w danej chwili piłkę, rzuca ją do dziecka stojącego bezpośrednio z lewej strony (z prawdopodobieństwem $p<\frac{1}{2}$) lub bezpośrednio z prawej strony (również z prawdopodobieństwem p) albo zabiera piłkę i wraca do domu (z prawdopodobieństwem $1-2p$). W zależności od p wyznaczyć prawdopodobieństwo, że do domu z piłką wróci to samo dziecko, które ją przyniosło.

Wskazówki do zadań

1. Niech $S_1, S_2, \ldots, S_5$ oznaczają kolejno pobyt kota w domu, przedszkolu, ogrodzie, polu i w lesie. Przez q_i oznaczamy prawdopodobieństwo, że kot zakończy wędrówkę na polu (stan S_4) pod warunkiem, że rozpoczął w stanie S_i. Oczywiście $q_4=1$ i $q_2=0$. Wartość q_3 wyznaczymy, rozwiązując układ równań: $q_1=\frac{1}{3}q_3+\frac{1}{2}$, $q_3=\frac{1}{4}q_1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}q_5$, $q_5=\frac{1}{2}q_3$.

2. Stan S_i dla $i=0,1,2,3,4$ można utożsamić z kwotą, którą ma student, a stan S_5 – to ten, w którym student ma 5 lub 6 złotych, czyli stać go na napój.

3. Jako stany można w tym zadaniu wyróżnić `start`, O i R (wynik pierwszego rzutu oraz tych następujących po reszce), OO, OR, OOR (wygrana Małgosi) i ORR (wygrana Jasia). Szansa na wygraną Jasia to $\frac{1}{3}$.

Ciekawostka. Dla każdego wyboru konfiguracji trzech kolejnych wyników skutkujących wygraną Jasia Małgosia może wybrać inną konfigurację, która daje jej przewagę w takiej rozgrywce (*RROzważania O RReszce i OORle*, Δ^{11}_{15}).

4. Ponumerujmy dzieci od 1 do 7 według kolejności stania w kręgu. Niech S_i będzie stanem, w którym i-te dziecko ma piłkę, a S_{7+i} – stanem, w którym i-te dziecko zabiera piłkę do domu. Załóżmy, że pierwsze dziecko przyszło z piłką, więc stanem początkowym jest S_1, a interesuje nas q_8. Rachunki znacznie ułatwią równości $q_2=q_7$, $q_3=q_6$ i $q_4=q_5$, które wynikają z symetrii.